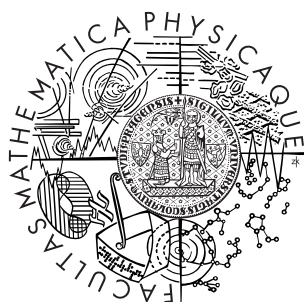


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Rozehnal

Pozdní fáze formování velkých planet sluneční soustavy

Astronomický ústav MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Miroslav Brož, Ph.D.,

Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2009

Děkuji Mgr. Miroslavu Brožovi, Ph.D. za podnětné připomínky, neocenitelnou pomoc s přípravou této práce a její pečlivé vedení. Rád bych také na tomto místě poděkoval Prof. RNDr. Petru Kulhánkovi, CSc., za jeho obětavou pomoc při mém studiu na MFF UK, za kterou bych mu rád tuto práci věnoval.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a s jejím zveřejněním.

V Praze dne 25. 5. 2009

Jakub Rozehnal

Název práce: *Pozdní fáze formování velkých planet sluneční soustavy*

Autor: *Jakub Rozehnal*

Ústav: *Astronomický ústav MFF UK*

Vedoucí bakalářské práce: *Mgr. Miroslav Brož, Ph.D.*

E-mail vedoucího: *mira@sirrah.troja.mff.cuni.cz*

Abstrakt: *Práce se zabývá procesem vzniku sluneční soustavy, zejména fázemi, které nastaly po rozptýlení plynné složky disku. Nejprve popisujeme model akrece velkých planet z malých planetezimál, který však není schopen objasnit vznik planet Uran a Neptun ve velkých heliocentrických vzdálenostech. Proto následně diskutujeme migraci planet, která je procesem nezbytným nejen pro vysvětlení současných drah planet, ale také pochopení populací malých těles, například Plutina. Závěrečná část práce je věnována vlastním numerickým simulacím, ve kterých se snažíme vystihnout některé aspekty planetární migrace.*

Klíčová slova: *sluneční soustava, planetezimály, akrece, migrace planet*

Title: *Late phases of the formation of the giant planets in the Solar System*

Author: *Jakub Rozehnal*

Department: *Astronomical Institute of Charles University*

Supervisor: *Mgr. Miroslav Broz, Ph.D.*

Supervisor's e-mail address: *mira@sirrah.troja.mff.cuni.cz*

Abstract: *In this work we study the processes in the Solar System, namely during the phases, which occurred after dissolution of the gaseous protoplanetary disk. At first we describe a standard accretion model of giant planets, which is not able to explain formation of Uranus and Neptune at large heliocentric distances. Secondly, we discuss migration of planets, which seems to be an inevitable process, both to explain current orbits of planets and distribution of small-body populations, like Plutinos. Last part of the thesis is devoted to our numerical simulations, which aim to explain some of the aspects of planetary migration.*

Keywords: *solar system, planetesimals, accretion, planet migration*

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 5 |
| 2 | Vznik sluneční soustavy | 7 |
| 3 | Planetární akrece | 10 |
| 3.1 | Model planetární akrece | 12 |
| 3.1.1 | Četnost kolizí | 14 |
| 3.1.2 | Vývoj rychlostí | 16 |
| 3.1.3 | Viskózní promíchávání | 17 |
| 3.1.4 | Vývoj hmotností | 19 |
| 3.2 | Růst planet Uranu a Neptunu | 20 |
| 3.2.1 | Maximální rozměr planetezimál | 21 |
| 3.2.2 | Problém s dokončením akrece | 22 |
| 4 | Migrace planet v planetezimálních discích | 24 |
| 4.1 | Dynamické příčiny planetární migrace | 25 |
| 4.2 | Diskuze směru migrace | 27 |
| 4.3 | Zachycení v rezonanci během migrace | 30 |
| 4.4 | Jednoduchá migrace ve sluneční soustavě | 32 |
| 4.4.1 | Migrace v rozlehlém disku | 32 |
| 4.4.2 | Omezení plynoucích z pozorování Kuiperova pásu | 34 |
| 4.5 | Model vzniku Uranu a Neptunu mezi Jupiterem a Saturnem | 36 |
| 4.6 | Model z Nice dynamického vývoje obřích planet | 37 |
| 4.6.1 | Nastavení počátečních podmínek | 38 |
| 4.6.2 | Výsledky simulací a vývoj drah ledových obrů | 38 |
| 4.7 | Pozorování podporující model z Nice | 41 |
| 4.7.1 | Zachycení Jupiterových Trojanů | 41 |
| 4.7.2 | Kuiperův pás | 42 |
| 4.7.3 | Pozdní bombardování Měsíce | 43 |
| 5 | Migrace planet v extrasolárních planetezimálních discích | 45 |
| 5.1 | Původ horkých Jupiterů | 45 |
| 5.2 | Migrace v dvouplanetárních systémech | 46 |
| 5.3 | Vypuzení planety daleko od mateřské hvězdy | 48 |
| 5.4 | Pozdní nestability | 49 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Simulace migrace planet | 51 |
| 6.1 | Symplektické integrátory | 51 |
| 6.2 | Limity použití integrátorů | 54 |
| 6.2.1 | Hmotnost testovacích částic | 54 |
| 6.2.2 | Vyloučení gravitační interakce mezi částicemi disku . . | 55 |
| 6.2.3 | Vyloučení srážek mezi částicemi disku | 56 |
| 6.3 | Simulace konkrétních dějů v pozdním období formování sluneční soustavy | 57 |
| 6.4 | Simulace N -částicovým integrátorem MERCURY | 58 |
| 6.4.1 | Zachycení těles v rezonancích s Neptunem | 65 |
| 6.4.2 | Rozpad populace v rezonanci 3:2 s Jupiterem | 65 |
| 6.5 | Simulace integrátorem SWIFT a porovnání výsledků | 67 |
| 7 | Závěr | 73 |
| | Literatura | 74 |

1 Úvod

Teorii vzniku sluneční soustavy můžeme právem považovat za jednu z nejdéle se vyvíjejících astrofyzikálních teorií. Poté, co Mikuláš Koperník (1473–1543) vzal Zemi její výsadní postavení ve vesmíru, založené na základech více než 1 000 let starého Ptolemaiovského geocentrického modelu, Galileo Galilei (1564–1642) roku 1610 objevil přirozené satelity Jupiteru a William Hershel (1738–1822) objevil v pořadí sedmou planetu sluneční soustavy, začali mnozí badatelé uvažovat o tom, jakým způsobem sluneční soustava vznikla, a jak se od svých počátků vyvíjela. Průchod novým myšlenkám umožnily mimo jiné právě objevy Galileiho a Hershella, kteří svými výzkumy vyvrátili přes jeden a půl tisíce let staré aristotelovské paradigma neměnnosti nebeské sféry. Vynález dalekohledu dramaticky rozšířil obzory lidského chápání vesmíru a odhalil existenci těles a objektů, o kterých lidé dříve neměli ani potuchy.

Jedny z prvních novodobých úvah o vzniku sluneční soustavy najdeme v díle *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, které roku 1755 vydal Immanuel Kant (1724–1804). Je zde načrtnuta teorie, podle které byly všechny objekty sluneční soustavy na počátku tvořeny „elementární pralátkou“. Významného filozofa k tomuto závěru vedl poznatek, že všechny planety obíhají přibližně v jedné rovině, která je navíc blízká rovině slunečního rovníku, a dále fakt, že všechny planety, jejichž rotace byla tehdy známa, rotují ve stejném smyslu, v jakém revolují.

Na Kantovy filozofické úvahy navázal Pierre Simon de Laplace (1749–1827), který roku 1796 ve své knize *Exposition du système du Monde* poprvé představil matematicky a fyzikálně formulovanou nebulární teorii vzniku sluneční soustavy. Předpokládal, že sluneční pramlhovina měla původní rozměr odpovídající dráze nejvzdálenější planety a postupným smršťováním a zrychlováním rotace oddělovala prstence látky, z níž pak zkondenzovaly planety. Tato hypotéza, dnes známá jako *Kantova–Laplaceova nebulární teorie*, dobře vysvětlovala základní mechanické aspekty sluneční soustavy, ovšem při bližším zkoumání se z hlediska dynamiky stala neudržitelnou, neboť nedovedla vysvětlit pozorované velikosti momentů hybnosti planet a Slunce. Slunce totiž obsahuje 99,9 % hmoty sluneční soustavy, ale je nositelem pouhých 2 % momentu hybnosti, zbytek je uložen v orbitálním pohybu planet.

Na problém s momentem hybnosti poukázal James Jeans (1877–1946), který vypracoval vlastní teorii, podle níž se Slunce v minulosti střetlo s jinou hvězdou. Při této kolizi měla procházející hvězda na Slunci vytvořit ohromnou slapovou vlnu,

která se od Slunce později zcela odtrhla a z jejích rotujících zbytků se následně utvořily planety. Přestože se tato katastrofická teorie v různých obměnách udržela až do čtyřicátých let 20. století, ani ona po fyzikální stránce neobstála. Její konec předznamenalo odhalení fyzikální podstaty stavby hvězd, jež ukázalo, že látka na povrchu hvězd je velmi řídká, a odtržená slapová vlna by nemohla zkondenzovat do podoby planet. Nebulární teorie tak proděla svou renesanci.

První kvantitativní výpočty struktury pramlhoviny provedli na počátku druhé poloviny 20. století Otto Juljevič Šmidt (1891–1956) a později Viktor Sergejevič Safronov (1917–1999). Přes dlouhý vývoj, který nebulární teorie prodělala, dnes máme za to, že její základy, vytvořené před více než dvěma staletími, jsou v zásadě kvalitativně správné. Následující kapitola proto nastiňuje současný standardní a široce přijímaný model vzniku planetárních soustav.

2 Vznik sluneční soustavy

Již v úvodu bylo zmíněno, že hlavními důvody, které vedly tvůrce nebulární teorie ke zformulování své domněnky, byly:

1. nízké sklony drah planet vůči rovině slunečního rovníku;
2. stejný smysl revoluce a zároveň;
3. shodný smysl rotace všech planet (s výjimkou Venuše a Neptunu, jejichž rotace nebyla tehdy známa).

Přestože byla první teorie vystavěna na filozofickém základě a pramenila zejména z kvalitativních úvah, odhalili její autoři velmi důležitou skutečnost – a to, že planetární systém vzniká přirozeně jako „vedlejší produkt“ tvorby hvězd.

Zásobárnami stavebního materiálu pro tvorbu hvězd a jejich planetárních soustav jsou obří molekulární mračna (GMC - Giant Molecular Clouds). Tato oblaka mají hmotnost v rozmezí 10^4 – 10^6 hmotnosti Slunce (M_\odot), jejich rozměry dosahují jednotek až desítek parseků a střední hustota látky se pohybuje okolo 10^3 částic na krychlový centimetr. Oblaka mohou mít i několik hustších jader o typické hmotnosti $1 M_\odot$ a centrální hustotě až 10^8 částic/cm³ [67].

Nejbližším obřím molekulárním mračnem je rozsáhlý komplex mlhovin v Orionu, které se rozprostírají ve vzdálenostech 350–500 pc od Země. Analýzy chemického složení odhalily kromě převažující směsi molekulárního vodíku a atomárního helia¹ také molekuly oxidu uhelnatého CO, kyanovodíku HCN, oxidu siřičitého SO₂, amoniaku NH₃ a řadu dalších molekul, iontů a radikálů. Díky své relativně malé vzdálenosti od Země je komplex mlhovin v Orionu zdrojem řady zásadních informací o dějích, které provázejí vznik nových hvězd. Nachází se zde celkem $(1-3) \times 10^4$ hvězd o stáří menším než (1–3) Myr (milionů let) a dále starší populace hvězd o stáří (3–30) Myr. Okolo četných mladých hvězd jsou pozorovány prachoplynné disky (proplydy) staré řádově 1 Myr, výjimečně přes 10 Myr.

Při dostatečně velké hmotnosti oblaku nastane jeho gravitační kolaps. James Jeans odvodil hmotnostní kritérium, jež dává do souvislosti gravitační nestabilitu, zajišťující pokračování kontrakce, se střední hustotou oblaku ρ a teplotou T :

$$M > M_J \approx \text{konst.} \left(\frac{kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}}. \quad (1)$$

¹Vodík a helium jsou ve spektru obřích molekulárních mračen špatně detekovatelné. K odhadu jejich množství v oblaku se využívá pozorování emisních spekter oxidu uhelnatého, který tyto dva prvky v oblacích doprovází.

Tabulka 1: Velikost Jeansova kritéria pro obří molekulární mračna (GMC), jejich chladná jádra (GMCC) a protoplanetární disk, jenž byl předchůdcem sluneční soustavy (PPD).

| | GMC | GMCC | PPD |
|------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| T [K] | 100 | 30 | 100 |
| ρ [kg.m ⁻³] | 3×10^{-18} | 3×10^{-15} | 1×10^{-11} |
| M_J [M_\odot] | 133 | 0,7 | 0,1 |

Toto *Jeansovo kritérium* tedy udává minimální hmotnost zhustku M v obřím molekulárním mračnu, ze kterého může vzniknout samostatný gravitačně vázaný systém. Tato hmotnost musí být podle očekávání tím vyšší, čím vyšší je teplota, tj. střední rychlost částic v oblaku, neboť se stoupající teplotou dle stavové rovnice roste tlak, a tedy i tlakový gradient. Vyšší teplota proto vede k samovolnému rozptýlu částic a rozpadu GMC.

Tabulka 1 uvádí typické hodnoty Jeansova kritéria pro GMC, jejich chladná jádra (stíněná okolním materiálem) a protoplanetární disk [5].

Vidíme, že velikost Jeansovy hmotnosti pro obří molekulární mračna dosahuje řádově vyšších hodnot, než je hmotnost Slunce. Z jednoho takového oblaku však díky jeho následné *fragmentaci* vznikají zpravidla desítky či stovky hvězd, jak o tom svědčí četná pozorování *otevřených hvězdokup*.

Podrobnější popis hroucení části oblaku a vznik plochého disku není předmětem této práce, proto přejdeme do okamžiku, kdy jedno z jader pramlhoviny již zkolabovalo do hvězdy, v jejímž okolí se ze zbylého materiálu utvořil plochý disk. Díky radiometrickým metodám datování nejstarších meteoritů - chondritů, které nenesou známky žádné podstatné metamorfózy, soudíme, že k vytvoření plochého protoplanetárního disku došlo v období před $(4,56 \pm 0,01)$ miliardy let, neboť žádný meteorit není starší.

Uvážíme-li, že protoplanetární disk, jenž byl předchůdcem dnešní sluneční soustavy, měl hmotnost přibližně $0,04 M_\odot$, střední teplotu v řádu 100 K a jeho střední hustota nepřesahovala 10^{-11} kg/m³ [5], dospějeme dosazením těchto hodnot do vztahu (1) k závěru, že v protoplanetárním disku nebylo Jeansovo kritérium splněno, viz tabulka 1. Planety obíhající okolo Slunce tedy nemohly vzniknout přímým kolapsem zárodečného disku². Mezi další faktory, které znemožňují vznik

²Uvedené hodnoty se týkají předpokládaných vlastností protoplanetárního disku, který byl prekurzorem dnešní sluneční soustavy. V jiných discích mohou být předpoklady Jeansova kritéria splněny.

planet přímým kolapsem, můžeme zařadit rušivé účinky slapových sil Slunce a také skutečnost, že na budoucí zárodek planety mohou akreovat jen částice z blízkého okolí, vymezeném jeho Rocheovým lalokem.

Uvedené skutečnosti ukazují nutnost zavedení modelu planetární akrece, kterým se zabývá následující kapitola.

3 Planetární akrece

Z fenomenologického hlediska můžeme formování planet rozdělit do čtyř základních fází [5]:

1. kondenzace plynu a formování malých prachových částic;
2. akrece prachu až na planetezimály (rozměru řádově 1 km);
3. vznik planetárních embryí (řádově o hmotnosti Měsíce) gravitačním spojováním planetezimál;
4. vznik planet a akrece plynu na obří planety.

Počátečním procesem tvorby zárodků planet je formování prachových částic, které předpokládá kondenzaci plynu při poklesu teploty disku na 1 700–1 200 K, a jejich elektrostatické „slepování“ do větších celků.

Fakt, že teplota T v disku klesala se vzdáleností r od středu jako $T \sim r^{-1/2}$, vedl k *chemické diferenciaci* disku, neboť volatilní látky mohly kondenzovat až ve větších vzdálenostech od Slunce (například voda mohla za podmínek v protoplanetárním disku zkondenzovat ve vzdálenosti 3–4 AU). Podle [3] lze odhadnout maximální rychlost růstu částic

$$\frac{dR_s}{dt} = 0,6 \text{ cm/rok}, \quad (2)$$

kde R_s je typický poloměr částice. Prachové částice milimetrových rozměrů tedy mohou v protoplanetárním disku narůst během jediného roku.

Vzájemnou interakcí narůstajících částic s okolním plynem a převládajícími srážkami v husté centrální rovině disku dochází v časové škále řádu desítek let k poklesu narůstajících částic do centrální *Laplaceovy roviny* a k jejich radiálnímu driftu směrem ke Slunci, čímž se dále zvyšuje pravděpodobnost vzájemných srážek. Tímto způsobem se z prachových částic vytvořily *planetezimály* o velikosti v řádu 100 m až 1 km.

Druhou vývojovou etapou vzniku planet je kolizní růst, způsobený srážkami planetezimál. Tření o plyn způsobuje, že sklon oběžných drah i excentricita obíhajících planetezimál se přiblíží nule. Jejich vzájemné rychlosti při těsném přiblížení jsou proto zpravidla malé, a konstruktivní kolize proto převažují nad destruktivními.

Pokud budeme zkoumat rychlost změny relativní hmotnosti $\frac{1}{M} \frac{dM}{dt}$ planetezimál o poloměru R , můžeme rozlišit dva základní případy (viz též dále v kapitole popisující model planetární akrece):

1. *uspořádaný růst*, daný vztahem

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \sim \frac{1}{R}, \quad (3)$$

který funguje za předpokladu $v_{\text{rel}} > v_{\text{esc}}$, kde v_{rel} je průměrná rychlost pohybu sledovaného tělesa vzhledem k okolním planetezimálám a

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (4)$$

je úniková rychlost z jeho povrchu.

2. *překotný růst*, ke kterému dochází za podmínky $v_{\text{rel}} < v_{\text{esc}}$, lze popsat vztahem

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \sim R. \quad (5)$$

Při uspořádaném růstu rostou menší tělesa rychleji než větší, naproti tomu při překotném růstu je podstatnější růst větších těles. To je způsobeno jejich vzájemnou rychlostí: v případě překotného růstu se vůči sobě blízké planetezimály pohybují pomalu, takže se projevuje *gravitační fokusace*, tedy vzájemné gravitační přitahování planetezimál. Naopak při uspořádaném růstu jsou vzájemné rychlosti planetezimál velké, takže ke kolizím dochází jen na geometrickém účinném průřezu pohybujících se těles.

Podrobný model kolizního růstu, zahrnující také časový vývoj v_{rel} (viz 3.1) ukazuje, že v popisované fázi vývoje planetárního systému probíhal nejprve uspořádaný růst balvanů na planetezimály rozměrů ~ 1 km. Díky vzájemným gravitačním interakcím a tření o plyn však došlo ke snížení vzájemné rychlosti planetezimál, což vedlo k jejich překotnému růstu.

Gravitační působení obíhajících velkých těles posléze zvyšovalo vzájemné relativní rychlosti okolních planetezimál, což vedlo k postupnému útlumu překotného růstu, který trval po dobu řádově 10^5 let. Poté pokračoval uspořádaný růst velkých planetezimál, který označujeme jako *oligarchický růst*, a překotný růst malých planetezimál, čímž se zvyšoval počet planetárních embryí, jenž na konci této fáze dosáhl několika desítek.

Během konečné fáze došlo ke vzniku terestrických planet a plynných obrů. Planetární embrya o velikosti srovnatelné s Měsícem se náhodně srážela, což mělo za následek vznik těles hmotností srovnatelných se Zemí v časovém období 10^8 let. Ve větších vzdálenostech od Slunce docházelo ke kolapsu plynu na kamenná jádra, čímž vznikly obří planety.

Následující kapitola pojednává o modelu planetární akrece podrobněji.

3.1 Model planetární akrece

Cílem této kapitoly je představení self-konzistentního modelu planetární akrece, popsaného v [15]. V závěru jsou diskutována problematická místa tohoto modelu, která dále vysvětluje teorie migrace planet.

Model planetární akrece je možno v určitém přiblížení popsat v rámci omezeného problému tří těles - Slunce o poloměru R_\odot a hmotnosti M_\odot , velkého tělesa (budoucí planety) o poloměru R a hmotnosti M a bezrozměrné testovací částice, planetezimály. Velké poměry mezi hmotnostmi jednotlivých těles umožňují další zjednodušení založené na faktu, že při dostatečně velké vzdálenosti testovací částice od planety je částice primárně ovlivňována gravitačním polem Slunce, a gravitační působení planety je tedy možno zanedbat. Naopak, pohyb testovací částice je v malé vzdálenosti od planety dominantně ovlivňován její gravitací, a zanedbat pak můžeme silové působení Slunce.

Oblast, ve které je pohyb částice dominantně určován působením gravitačního pole planety, označujeme jako *Hillovu sféru* o poloměru R_H .³ Jeho velikost můžeme s dostatečnou přesností odvodit s pomocí aproximace, ve které je velikost Hillovy sféry dána takovou vzdáleností, v níž se oběžná perioda malého tělesa okolo velkého rovná oběžné periodě velkého tělesa okolo Slunce, tj.:

$$\left(\frac{GM_\odot}{a^3}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{GM}{R_H^3}\right)^{1/2}, \quad (6)$$

kde a je hlavní poloosa oběžné dráhy velkého tělesa. Z výše uvedeného vztahu vyplývá pro Hillův poloměr

$$R_H \sim a \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/3}, \quad (7)$$

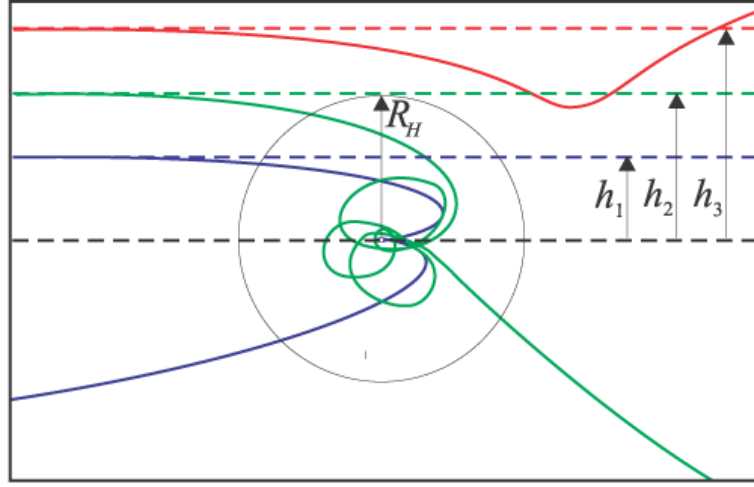
nebo

$$R_H \sim R\zeta^{-1}, \quad (8)$$

kde označujeme $\zeta \equiv \left(\frac{\rho_S}{\rho_P}\right)^{1/3} \frac{R_S}{a}$. Protože střední hustota Slunce je přibližně rovna střední hustotě planety a ζ závisí na třetí odmocnině jejich poměru, je ζ je přibližně rovno zdánlivému úhlovému poloměru Slunce, pozorovaného ze vzdálenosti a .⁴

³Hamilton a Burns [24] ukazují, že v dlouhodobém měřítku nejsou v reálných podmínkách dráhy těles v Hillově sféře v blízkosti Hillova poloměru stabilní, stability dosahují zhruba v 1/2 vzdálenosti R_H od planety. Při studiu akrece planet je však možno tuto skutečnost zanedbat.

⁴Ve vzdálenosti Země je $\zeta \sim 10^{-2}$, pro Kuiperův pás je $\zeta \sim 10^{-4}$



Obrázek 1: Příklady možné dráhy malého tělesa při průletu okolo velkého tělesa s Hillovou sférou o poloměru R_H v závislosti na impaktivém parametru h v korotující soustavě. Modrá křivka ukazuje dráhu pro $h_1 < R_H$, zelená křivka pro $h_2 \sim R_H$ a červená křivka pro $h_3 > R_H$.

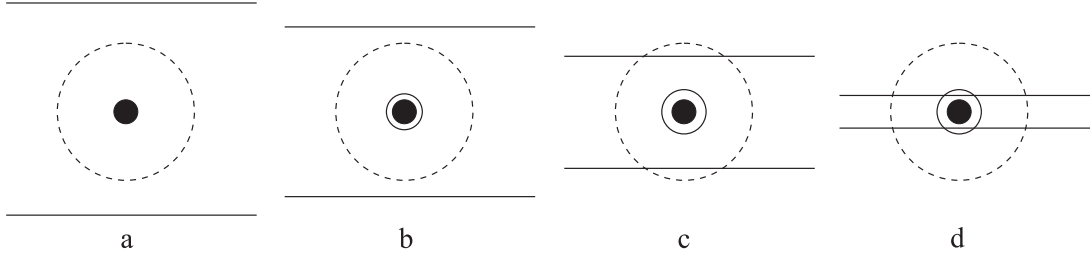
Pro jednoduchost dále zavedeme formalismus, v němž označíme odchylku rychlosti velkého tělesa $v \equiv v_{act} - v_{circ}$, kde v_{act} je skutečná obvodová rychlost a v_{circ} kruhová rychlost ve vzdálenosti a od Slunce. Pro velké těleso na kruhové dráze je tedy $v \equiv 0$. Stejným způsobem zavedeme i relativní rychlost pro testovací částice $u \equiv u_{act} - u_{circ}$. Ve většině případů budeme dále předpokládat, že dráhy velkých těles jsou obecně méně excentrické, tj. že v průměru je $\bar{v} < \bar{u}$.

Petit a Hénon [49] popisují tři odlišné způsoby, jakými se může testovací částice s relativní rychlostí $u \equiv 0$ pohybovat při průchodu v blízkosti velkého tělesa, a to v závislosti na impaktivém parametru h , viz obrázek 1.

1. Pro $h < R_H$ vyústí zpravidla setkání velkého a malého tělesa v gravitační „odraz“ malého tělesa do poloprostoru, odkud přiletlo.
2. Pro velké hodnoty h vzhledem k R_H nastává jen malá odchylka od původního směru.
3. Konečně pro $h \sim R_H$ vstupuje menší těleso do Hillovy sféry většího tělesa, kde se pohybuje po komplexních trajektoriích, a zpravidla Hillovu oblast opustí v náhodném směru relativní rychlostí v řádu hillovské rychlosti v_H :

$$v_H = \left(\frac{GM_S}{R_H} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Pokud je relativní rychlost malého tělesa $u < v_H$, je možno za předpokladu, že se malá tělesa nacházejí v infinitezimálně tenkém disku malých těles, odhad-



Obrázek 2: Geometrie tloušťky disku (plná čára), velikosti tělesa (plný kruh), jeho Hillovy sféry (čárkovaná kružnice) a jeho efektivního účinného průřezu (plná kružnice) pro případy a) $u = v_{esc}$, b) $v_{esc} > u > v_H$, c) $v_H > u > \zeta^{1/2}v_H$, d) $u < \zeta^{1/2}v_H$. Podle [15].

nout závislost četnosti vstupů těchto těles do Hillovy sféry velkého tělesa ER_H (*Hill entering rate*). Je-li σ plošná hustota disku a m střední hmotnost malých těles, pak můžeme četnost ER_H vyjádřit jako součin počtu malých těles na jednotkovou plochu σ/m , úhlové frekvence oběhu (středního pohybu) velkého tělesa okolo Slunce ve vzdálenosti a :

$$\Omega \sim (GM_S/a^3)^{1/2}, \quad (10)$$

a účinného průřezu R_H^2 , tedy

$$ER_H \sim \frac{\sigma}{m} \Omega R_H^2. \quad (11)$$

3.1.1 Četnost kolizí

Chceme-li odhadnout rychlost růstu hmotnosti velkých těles, musíme nejdříve spočítat četnost kolizí mezi malými tělesy, která se rozkládají v plochem disku, a velkým tělesem, jež je v disku vnořeno. Pro odvození četnosti kolizí budeme odděleně vyšetřovat celkem čtyři možné případy (viz obrázek 2), závisející na poměrech velikosti u k únikové rychlosti z povrchu velkého tělesa v_{esc} , a také na poměrech k v_H a $\zeta^{1/2}v_H$:

1. Pro případ $u > v_{esc}$ je možno gravitační působení velkého tělesa zcela zanedbat a kolizní účinný průřez planety je proto úměrný R^2 . Označíme-li plošnou hustotu disku malých těles σ , je koncentrace malých těles o střední hmotnosti

m v jednotkovém objemu $n_s = \frac{\rho}{m} = \sigma\Omega/(mu)$,⁵ a pro kolizní četnost CR (*collisional rate*) můžeme psát:

$$CR \sim \frac{\sigma}{mu}\Omega R^2 u = \frac{\sigma}{m}\Omega R^2 \quad (12)$$

Kolizní četnost je tedy přímo úměrná plošné hustotě disku malých těles.

2. Pro případ, kdy je relativní rychlost u malých těles menší než úniková rychlost z velkého tělesa, ale stále vyšší než Hillova rychlost, $v_{esc} > u > v_H$, zvyšuje gravitační působení účinný průřez velkého tělesa (hovoříme o *gravitační fokusaci*). Účinný kolizní průřez je za takových podmínek možno určit s pomocí impaktového parametru b_g , na který se musí malé těleso přiblížit k velkému, aby se právě tečně dotklo jeho povrchu. Hodnotu tohoto parametru můžeme určit následovně: před přiblížením je moment hybnosti na jednotkovou hmotnost malého tělesa okolo velkého roven $u \cdot b_g$, při kontaktu je roven $v_{esc} \cdot R$, takže při zachování momentu hybnosti musí platit:

$$b_g \sim R \frac{v_{esc}}{u}, \quad (13)$$

takže kolizní účinný průřez je úměrný $b_g^2 \sim R^2 (v_{esc}/u)^2$. Gravitace tedy zvyšuje kolizní četnost danou rovnicí (12) o faktor $(v_{esc}/u)^2$, odkud pro daný případ dostáváme

$$CR \sim \frac{\sigma}{m}\Omega R^2 \left(\frac{v_{esc}}{u}\right)^2 \quad (14)$$

3. Nyní uvažujme případ, kdy je $v_H > u > \zeta^{1/2}v_H$. Analytickou formuli kolizní četnosti pro tento případ odvodili mezi prvními Greenberg et al. [20]. Podle nich je dána součinem dvou členů:

$$CR \sim ER_H \cdot P, \quad (15)$$

kde P je pravděpodobnost, že po vstupu do Hillovy sféry dojde k impaktu malého tělesa na velké. Hodnotu P je možno odhadnout následovně: Pokud je impaktový parametr malého tělesa uvnitř Hillovy sféry vzhledem k velkému tělesu menší než b_g (viz rovnice 13), dojde ke srážce. S využitím vztahu (8) a skutečnosti, že $v_H \sim v_{esc}\zeta^{1/2} \sim \Omega R_H$, můžeme nyní vztah pro b_g přepsat na tvar

$$b_g \sim \zeta^{1/2} R_H. \quad (16)$$

⁵K určení hustoty ρ jsme využili následující úvahu: $\rho = \frac{\sigma}{H}$, kde H je tloušťka disku. Nyní budeme předpokládat, že rychlost u a z -ová složka u_z jsou stejného řádu, tj. $u \simeq u_z \simeq \Omega r i \simeq \Omega H$, kde i je mezní sklon oběžných drah (počítáme $i \doteq \sin i$). Je tedy $H \sim \frac{u}{\Omega}$ a $\rho = \sigma \frac{\Omega}{u}$.

Ačkoli můžeme disk těles při odhadu ER_H pokládat za infinitezimálně tenký, při odhadu kolizní pravděpodobnosti musíme jeho konečnou tloušťku vzít v úvahu. Protože trajektorie malých těles uvnitř Hillovy sféry jsou náhodné, odhadneme P jako poměr kolizního účinného průřezu b_g^2 k účinnému průřezu té části Hillovy sféry, která je ponořená v disku malých těles $R_H/H = R_H \cdot u/\Omega$. S využitím (16) obdržíme

$$P \sim \frac{R_H^2 \zeta \Omega}{R_H u} \sim \zeta \frac{v_H}{u}. \quad (17)$$

Dosazením (9) a (17) do (15) dostáváme

$$CR \sim \frac{\sigma \Omega}{m} R_H^2 \zeta^{-1} \frac{v_H}{u} \quad (18)$$

4. Pro velmi tenký disk za předpokladu $u < \zeta^{1/2} v_H$ je postup odhadu CR stejný s tím, že disk při odhadu P můžeme pokládat za infinitezimálně tenký [20]. Potom je P dáno poměrem impaktivních parametrů vedoucích ke kolizi (vztah 16) k R_H , tj.

$$P \sim \zeta^{1/2}, \quad (19)$$

z čehož s využitím (9) a (15) plyne

$$CR \sim \frac{\sigma \Omega}{m} R^2 \zeta^{-3/2}. \quad (20)$$

3.1.2 Vývoj rychlostí

Relativní rychlosti u a v se v čase mění díky třem různým procesům:

1. dynamickému ohřevu
2. dynamickému ochlazování
3. viskóznímu promíchávání

K dosud učiněným předpokladům $u > v$ a $M > m$ budeme dále předpokládat, že $mu < Mv$, díky čemuž může velké těleso předtím, než se změní jeho relativní rychlost, prodělat značné množství srážek s malými tělesy.

Pro případ $u > v_{esc}$ můžeme zanedbat gravitační fokusování, takže ke změně v a u dojde jen v případě, kdy se tělesa srazí. Za předpokladu, že budeme uvažovat elastické srážky a nebudeme se zabývat fragmentací, se hybnost velkého tělesa, které prodělá čelní srážku s malým tělesem, sníží o $\sim m(u + v)$. Protože četnost čelních srážek je úměrná $\sim n_s R^2 (u + v)$, kde n_s je koncentrace malých těles, velké těleso ztrácí díky srážkám hybnost rychlostí

$$M \left. \frac{dv}{dt} \right|_f \sim -n_s R^2 m (u + v)^2. \quad (21)$$

Naopak díky dopadu těles zezadu získává hybnost

$$M \left. \frac{dv}{dt} \right|_r \sim -n_s R^2 m (u - v)^2. \quad (22)$$

Rozdílem obou rovnic zjišťujeme, že

$$\frac{1}{v} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{\text{ochlaz.}} \sim -n_s R^2 u \frac{m}{M} \quad (23)$$

což lze interpretovat tak, že velké těleso zpomaluje do doby, ve které se střetne s malými tělesy o celkové hmotnosti M .

Pokud má velké těleso dostatečně malou rychlost $v < u$, pak jej malá tělesa mají tendenci urychlovat. Při každé srážce mu předají hybnost $\sim mu$, a to v náhodném směru, takže celková hybnost velkého tělesa se zvyšuje jako při „náhodné procházce“, tj. po N srážkách vzroste hybnost velkého tělesa o $\sim mu\sqrt{N}$. Relativní rychlost v velkého tělesa se zdvojnásobí, jestliže $mu\sqrt{N} \sim Mv$, tj. po $N \sim (Mv/mu)^2$ srážkách, takže

$$\frac{1}{v} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{\text{otepl.}} \sim -n_s R^2 u \left(\frac{mu}{Mv} \right)^2 = -\frac{mu^2}{Mv^2} \frac{1}{v} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{\text{ochlaz.}} \quad (24)$$

Pokud by náhodou bylo $Mv^2 = mu^2$, dostali bychom $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{\text{otepl.}} + \left. \frac{dv}{dt} \right|_{\text{ochlaz.}} = 0$. Protože je ale ve většině případů kinetická energie velkých těles vyšší než energie malých, převládá v diskutovaném případě u velkých těles dynamické ochlazování. Naopak malá tělesa jsou dynamicky oteplována, neboť při čelních srážkách získávají více energie, než kolik jí při dopadech zezadu odevzdávají.

Analogicky k postupu uvedenému výše lze pro rychlost u malých těles odvodit vztahy:

$$\frac{1}{u} \left. \frac{du}{dt} \right|_{\text{otepl.}} \sim -n_b R^2 \frac{v^2}{u}, \quad (25)$$

a

$$\frac{1}{u} \left. \frac{du}{dt} \right|_{\text{ochlaz.}} \sim -n_b u R^2 \frac{m}{M}, \quad (26)$$

kde jsme n_b označili koncentraci velkých těles.

3.1.3 Viskózní promíchávání

Kinetická energie malých těles se v planetezimálním disku obecně nezachovává, neboť je zvyšována viskózním promícháváním velkými tělesy. Je to podobné jako v případě

viskózní kapaliny, kterou promícháváme, a díky tření se kapalina zahřívá.⁶ Analogie s kapalinou však v disku není zcela přesná, neboť četnost interakcí mezi planetezimálami je mnohem menší, než je obvyklé u molekul kapaliny.

Vzhledem ke kruhové dráze jsou azimutální (tangenciální) a radiální složky rychlosti řádu u . Při elastické srážce dojde k rotaci vektoru relativní rychlosti při zachování jeho velikosti. (Za předpokladu, že zanedbáme reakci velkého tělesa.) Že taková rotace má tendenci zvýšit relativní energii malého tělesa, ukázal jako první Safronov [52]. Z jeho předpokladů vyplývá, že dynamické oteplování malých těles viskózním mícháním je obdobné jako četnost kolizí:

$$\left. \frac{1}{u} \frac{du}{dt} \right|_{vs} \sim n_b u R^2 \quad (27)$$

a efekt viskózního míchání na velká tělesa je stejný jako ohřev dynamickým třením

$$\left. \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \right|_{vs} \sim n_s u R^2 \left(\frac{mu}{Mv} \right)^2. \quad (28)$$

Shrneme-li tyto poznatky, je možno konstatovat, že pro $u > v_{esc}$ je relativní rychlost velkých těles v ovlivňována dynamickým ochlazováním:

$$\left. \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \right|_{ochlaz.} \sim -\Omega \frac{\sigma}{\rho R} \quad (29)$$

a dále dynamickým ohřevem a viskózním mícháním

$$\left. \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \right|_{otopl.} \sim \left. \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \right|_{vs} \sim \Omega \frac{\sigma}{\rho R} \frac{mu^2}{Mv^2}, \quad (30)$$

kde bylo nahrazeno $n_s = \sigma \Omega / mu$. Rychlosti malých těles u jsou významně ovlivňovány pouze viskózním promícháváním:

$$\left. \frac{1}{u} \frac{du}{dt} \right|_{vs} \sim \Omega \frac{\Sigma}{\rho R}, \quad (31)$$

což plyne z (27), kde jsme dosadili $n_b = \Sigma \Omega / Mu$, přičemž Σ jsme označili plošnou hustotu velkých těles.

Pro případ $v_{esc} > u > v_H$ je již nutno brát v potaz gravitační fokusaci velkého tělesa, při níž dochází k výměně momentu hybnosti mezi velkým a malým tělesem,

⁶Studujeme-li procesy při viskózním promíchávání, bereme v potaz i vzájemné interakce mezi malými částicemi, které zde hrají důležitou roli. Tím se tento proces liší od dynamického ohřevu, kde uvažujeme pouze interakce mezi planetezimálami a planetou.

zejména při odchýleních nekončících srážkou. Účinný průřez této interakce je roven $R^2(v_{esc}/u)^4$, nikoli R^2 , a proto je nutno rovnice (29)–(31) násobit faktorem $(v_{esc}/u)^4$.⁷

Změnu relativní rychlosti u malých těles díky promíchávání je možno vyjádřit vztahem

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dt} \Big|_{vs} \sim \Omega \frac{\Sigma}{\rho R} f_{vs} \left(\frac{u}{v_{esc}} \right), \quad (32)$$

kde funkce

$$f_{vs}(x) = \begin{cases} x^{-4}, & x \in (\alpha^{1/2}, 1), \\ \alpha^{-3/2} x^{-1}, & x < \alpha^{1/2}. \end{cases} \quad (33)$$

Změnu u způsobenou dynamickým ohřevem a ochlazováním velkými tělesy je možno vzhledem ke změně způsobené viskózním promícháváním zanedbat.

Vliv dynamického ochlazování velkých těles, způsobeného malými tělesy, je možno popsat vztahem (rovnice (27) a (30))

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \Big|_{ochlaz.} \sim -\Omega \frac{\sigma}{\rho R} f_{ochlaz} \left(\frac{u}{v_{esc}} \right), \quad (34)$$

kde

$$f_{ochlaz.}(x) = \begin{cases} x^{-4}, & x \in (\alpha^{1/2}, 1), \\ \alpha^{-2}, & x < \alpha^{1/2}. \end{cases} \quad (35)$$

Změnu v viskózním promícháváním způsobeném mořem malých těles je možno zanedbat, stejně jako dynamický ohřev velkých těles malými, neboť ten je pro $u > v_H$ s viskózním promícháváním srovnatelný, v opačném případě je menší.

Tyto výsledky jsme obdrželi za předpokladů, že $v < u$, $mu < Mv$, $u < a\Omega$ a $u < v_{esc}$. Dále jsme předpokládali, že sklony jsou srovnatelné s excentricitami, a zkoumali jsme vzájemnou interakci velkých a malých těles, nikoli však to, jak tyto skupiny působí samy na sebe (s výjimkou viskózního promíchávání).

3.1.4 Vývoj hmotností

K akreci malých těles dochází při nepružných srážkách, takže rychlost vzrůstu hmotnosti velkého tělesa M je rovna m -násobku četnosti srážek CR :

$$\frac{dM}{dt} = m \cdot CR. \quad (36)$$

Shrneme-li poznatky získané výše, můžeme pro případ $u < v_{esc}$ z rovnic (14), (18)) a (20) odvodit vývoj hmotnosti velkého tělesa M :

⁷Podrobné odvození uvedených vztahů je možno nalézt v [15], App. D.

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \sim \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \sim \Omega \frac{\sigma}{\rho R} f\left(\frac{u}{v_{esc}}\right), \quad (37)$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x \in (\zeta^{1/2}, 1), \\ \zeta^{-1/2} x^{-1}, & x \in (\zeta, \zeta^{1/2}), \\ \zeta^{-3/2}, & x < \zeta. \end{cases} \quad (38)$$

Uvážíme-li nyní, že $v_{esc}^2 \sim M/R \sim R^2$, můžeme z (37) odvodit vztah (5), popisující fázi *překotného růstu*.

Pro $u > v_{esc}$ je možno zanedbat gravitační fokusaci velkým tělesem, takže účinný průřez srážky je roven R^2 . Horní mez rychlosti růstu velkých těles získáme součtem hmotností dopadajících malých těles, z rovnice (12) dostáváme

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \sim \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \sim \Omega \frac{\sigma}{\rho R}, \quad (39)$$

což je vztah popisující uspořádaný růst (viz též vztah (3)).

Je však nutno podotknout, že ve skutečnosti se může díky fragmetaci velkého tělesa dopady jeho celková hmotnost i snižovat, zejména pokud je $u \gg v_{esc}$. Tento jev není v modelu započten.

3.2 Růst planet Uranu a Neptunu

V úvahách o vzniku Uranu a Neptunu nás omezuje několik pozorovaných skutečností. Především jsou to základní parametry, jako je současná hmotnost a průměr planet, a také pozorované stáří sluneční soustavy. Teoretické modely, vystavěné na základě telemetrických dat z družice Voyager 2, ukazují, že planety Uran i Neptun pravděpodobně obsahují vodík a hélium o celkové hmotnosti několikanásobku hmotnosti Země [21]. Z toho vyplývá, že ještě před vypuzením plynu z protoplanetárního disku musely existovat dostatečně hmotné protoplanety, na kterých došlo k akreci plynu. Pozorování mladých hvězd slunečního typu (např. [28]) naznačují, že k rozptýlení cirkumstelárního disku dojde v časovém měřítku několika milionů let, nejpozději pak do 10 milionů let.

Hayashi [26] odvodil pro plošnou hustotu ve sluneční mlhovině o minimální hmotnosti ⁸ (MMSN – Minimum Mass Solar Nebula) vztah, platný pro $a \geq 2,7$ AU:

$$\sigma_{\text{MMSN}} = 177 \text{ [g cm}^{-2}] \cdot \left(\frac{a}{10 \text{ [AU]}} \right)^{-3/2}. \quad (40)$$

Za předpokladu, že většinu času formování planety zabere poslední zdvojnásobení její hmotnosti, můžeme dobu formování odhadnout s využitím vztahu (37):

$$t_{\text{form}} \sim \frac{M}{\frac{dM}{dt}} \sim \Omega^{-1} \frac{\rho R}{\sigma} \left(\frac{u}{v_{\text{esc}}} \right)^2, \quad u \in (v_H, v_{\text{esc}}). \quad (41)$$

Ztotožníme-li $\sigma \equiv \sigma_{\text{MMSN}}$ a poloměr planety položíme $R = 25\,000$ km, získáme odhad

$$t_{\text{form}} \sim 15 \text{ [Gyr]} \cdot \left(\frac{a}{10 \text{ [AU]}} \right)^3 \left(\frac{u}{v_{\text{esc}}} \right)^2. \quad (42)$$

Bez gravitační fokusace, tj. pro případ $u = v_{\text{esc}}$, by byl čas potřebný k akreci Uranu, resp. Neptunu, 100 Gyr, resp. 400 Gyr. Aby došlo ke vzniku Neptunu za dobu existence sluneční soustavy, musel by Neptun vzniknout akrecí malých těles s $u \leq v_{\text{esc}}/10$. Tyto odhady ovšem vycházejí z předpokladu, že se planety vytvořily ve stejných vzdálenostech, v jakých dnes obíhají.

3.2.1 Maximální rozměr planetezímál

Výše odvozená podmínka, že relativní rychlost planetezímál musí být malá, však představuje problém. Za podmínky $u < v_{\text{esc}}$ je totiž při viskózním míchání jen malá část rozptýlených planetezímál akreována. To proto, že účinný průřez pro rozptyl je vyšší než účinný průřez pro akreci, tj. $F_{\text{col}}(u/v_{\text{esc}}) < F_{\text{vs}}(u/v_{\text{esc}})$ při $u < v_{\text{esc}}$. Znamená to, že embryo ohřívá malá tělesa rychleji, než je dokáže pohlcovat. Pokud nejsou malá tělesa ochlazována nepružnými srážkami nebo bržděna plynem, jen malá část jich je akreována při $u < v_{\text{esc}}$ a většina až při $u \sim v_{\text{esc}}$. Bez mechanismu ochlazení by byla většina těles akreována v režimu bez efektivního působení gravitační

⁸Název „sluneční mlhovina minimální hmotnosti“ odráží způsob, jakým byla hmotnost protoplanetárního disku určena. Při odhadu musíme vzít v úvahu, že značná část mlhoviny byla „odvanuta“ slunečním větrem, zejména její volatilní složky. Proto bylo při odhadu „doplněno“ složení planet o těkavé prvky tak, aby jejich chemické složení odpovídalo složení Slunce. Odtud můžeme získat průběh plošné hustoty v disku a při znalosti rozměrů i jeho hmotnost. Uvedený odhad udává minimální hmotnost proto, že předpokládá, že v disku zůstaly všechny netěkavé prvky.

fokusace, a planety Uran a Neptunem by nebyly s to se zformovat v časově přijatelném měřítku.

Tyto obecné závěry jsou v souladu s výsledky N -částicových simulací [39], které počítaly s několika sty těles stejné hmotnosti, jejichž celková hmotnost mírně převyšovala součet hmotností Uranu a Neptunu. Tyto simulace, které zároveň zahrnovaly gravitační perturbace od Jupiteru a Saturnu, ukázaly, že v oblastech dnešních drah Uranu a Neptunu prakticky nedocházelo k žádné akreci, neboť výrazně převažovaly efekty viskózního promíchávání.

Jak malá musejí být tělesa akreovaná Neptunem, aby se ochladila neelastickými srážkami? Vyrovnáme-li viskózní míchání embryem (rovnice (32) se $\Sigma \sim \sigma$) s neelastickými srážkami mezi malými tělesy o poloměru s ,⁹ získáváme

$$\frac{s}{R} \sim \left(\frac{u}{v_{esc}} \right)^4. \quad (43)$$

Protože jsme již výše odvodili, že má-li Neptun vzniknout za dobu existence sluneční soustavy, musí být $u < v_{esc}/10$, vychází velikost malých těles méně než několik kilometrů.¹⁰ Rychlý růst planet při akreci malých těles kilometrových rozměrů numerickými simulacemi prokázali Rafikov [50] a Thommes, Duncan a Levison [56].

3.2.2 Problém s dokončením akrece

Z pozorování víme, že se v okolí Uranu a Neptunu nevyskytují žádná malá tělesa. Uran a Neptun akreovaly zejména planetezimály o rozměrech pod 1 km (viz výše). Nyní je třeba ověřit, zda se během akrece spotřebovaly *všechny* přítomné planetezimály.

Jednou z možností, jak tohoto stavu docílit, je předpokládat, že se planetezimály pohybovaly po výstředných drahách. Pro výše popsany akreční model dává vztah (42), za předpokladu $u \sim u_{circ}$, kde $u_{circ} = \sqrt{GM/a}$, a $R \sim 25\,000$ km:

$$t_{form} \sim 2 \text{ [Gyr]} \left(\frac{a}{10 \text{ [AU]}} \right)^2 \doteq 20 \text{ Gyr}. \quad (44)$$

⁹Dosud jsme předpokládali dokonale elastické srážky. V reálném případě jsou ovšem srážky nepružné, čímž dochází k tlumení relativní rychlosti malých těles u : $\frac{1}{u} \frac{du}{dt} \sim -\Omega \frac{\sigma}{\rho s}$, $u > v_{esc}$ [15].

¹⁰Poznamenejme, že dle rovnice (41) je čas nutný pro zformování Země roven $t_{form} \sim 100$ Myr, takže podmínka přítomnosti malých těles nemusela být v oblasti dráhy Země splněna. Naopak, podle všeobecně přijímané teorie vznikl Měsíc poté, co Země akreovala těleso o rozměru asi polovičním než ona sama. Země tedy nevznikala jako jediné embryo, jednalo se o srážku embryí

Z toho plyne, že za uvedených podmínek obří planety sluneční soustavy vzniknout nemohly.

Pokud budeme naopak předpokládat, že $u \ll u_{circ}$, pak se může akreční doba snadno snížit i na méně než 10 Myr, ale pak akrece planetezimál končí vytvořením většího počtu planetárních embryí. Greenberg [20] odvodil vztah pro maximální poloměr embrya:

$$2\pi\sigma a (5R_H) = \frac{4}{3}\pi\rho R^3, \quad (45)$$

odkud dostáváme za předpokladu $\rho \doteq 1 \text{ g cm}^{-3}$, $R_H \doteq 0,62R (a/R_\odot)$ a $\sigma = \sigma_{\text{MMSN}}$ pro maximální poloměr finálního izolovaného tělesa odhad):

$$R_{fin} \doteq 12\,000 \left(\frac{a}{10 \text{ AU}} \right)^{1/4} \text{ km}. \quad (46)$$

Pro planetární embrya ve vzdálenostech Uranu a Neptunu vycházejí z tohoto vztahu poloměry Uranu $R_U = 14\,100 \text{ km}$ a Neptunu $R_N = 15\,800 \text{ km}$. S uvážením $M \sim R^3$ dostáváme hmotnosti přibližně 5-krát menší, než jaké jsou dnes pozorované.

Pokud by akrece za podmínky $u \ll u_{circ}$ dospěla do finálního stadia, kdy jsou spotřebována veškerá tělesa, bylo by za uvedených předpokladů výsledkem přibližně 10 malých planet obíhajících za drahou Saturnu, což je v příkrém rozporu s pozorováním.

Rozporu skutečnosti se závěry plynoucími z akrečního modelu se nelze vyhnout ani tím, že několikrát zvýšíme počáteční velikost plošné hustoty disku. Protože je $R_{fin} \propto \sigma^{1/2}$, vzniknou sice planety hmotností srovnatelné s Uranem a Neptunem, ale jak ukázali Goldreich et al. [15], musí jich potom vzniknout nejméně pět, a nikoli dvě, což je opět v rozporu s pozorováním.

Fernandez a Ip [13], Malhotra [42] a další přišli s myšlenkou, že uvedené nesrovnalosti by mohly být důsledkem *migrace planet*, tedy změn velkých poloos jejich drah, vyvolaných interakcí s planetezimály. Touto teorií se zabývá následující kapitola.

4 Migrace planet v planetezimálních discích

Přes desetiletí trvající vývoj scénáře vzniku sluneční soustavy, stručně popsaného v předchozí kapitole, se naše znalosti o vývoji planetárních systémů za posledních 15 let dramaticky změnily. Za vůbec nejzávažnější poznatek posledních let lze zřejmě pokládat fakt, že planety patrně nevznikaly v těch místech, kde je dnes nacházíme, ale naopak, v důsledku vynucených změn velkých poloos se dnes mohou nacházet i několik AU od místa svého vzniku. Mimo jiné to naznačují i analýzy extrasolárních planetárních systémů, které byly v posledních letech objeveny [44], [48], dále viz kapitola 5.

Ovšem klíčové důkazy migrace planet poskytuje naše vlastní sluneční soustava. Z teorie vzniku planetárních systémů vyplývá, že velké planety sluneční soustavy vznikly na prakticky kruhových a koplanárních drahách, což je však v rozporu s dnešními pozorovanými hodnotami excentricit, které se u Jupiteru, Saturnu a Uranu pohybují okolo 0,05, a sklonů oběžných rovin, které u Saturnu, Uranu a Neptunu dosahují vzhledem k oběžné rovině Jupiteru hodnot až 2° [31].

Uvedená fakta vedla k řadě modelů (například Malhotra, 1995 [42], Thommes, 2001, [57]), jež se více či méně úspěšně pokoušejí pozorované skutečnosti vysvětlit. Dosud nejúspěšnější teorii vývoje sluneční soustavy představili Tsiganis, Morbidelli, Gomes a Levison (2005), [58]. Tento model dynamického vývoje vnějších oblastí sluneční soustavy, který bude podrobněji popsán dále, nejpřesněji odráží pozorované vlastnosti vnějších oblastí sluneční soustavy a vysvětluje všechny důležité charakteristiky oběžných drah obřích planet, zejména velikosti jejich velkých poloos, excentricit a sklonů. Dále ukazuje, že planetární soustava s počátečními kvazi-cirkulárními a koplanárními drahami mohla být předchůdcem sluneční soustavy s dnešními parametry. Jedním z požadavků tohoto scénáře je, aby planety Jupiter a Saturn prošly rezonancí středních pohybů (MMR, z angl. *Mean Motion Resonance*) v poměru 1:2, přičemž průchod planet touto rezonancí nastal díky migraci, způsobené interakcí planet s diskem planetezimál. Uvedený model bývá také označován jako model z Nice, podle místa svého vzniku na observatoři v Nice. Text v této kapitole je zpracován zejména podle přehledového článku [40], který se zabývá teorií migrace planet a zároveň porovnává výsledky modelu z Nice s pozorovanými charakteristikami planet a dalších těles sluneční soustavy.

Migrace planet je podle všeho přirozeným důsledkem vzniku a vývoje planetárních systémů. Poté, co vznikly obří planety a ze zárodečného oblaku byly vypuzeny zbytky primordiální mlhoviny, sestávala sluneční soustava ze Slunce, planet

a dynamicky chladného disku drobných těles, planetezimál, jež se akrecí ještě nespojily do větších celků. Tento disk byl gravitačním působením planet postupně dynamicky erodován, což mělo za následek časté vybočení planetezimál z kruhových drah. Docházelo tak k jejich srážkám či častěji k vypuzení z původního planetezimálního disku. Z fyzikálního hlediska je migrace planet důsledkem výměny momentu hybnosti mezi planetami a částicemi planetezimálního disku. Numerické simulace, například [17], ukazují, že Jupiter byl tímto mechanismem tlačěn směrem ke Slunci, zatímco planety Saturn, Uran a Neptun migrovaly směrem ven.

Vlastní idea planetární migrace je ovšem stará bezmála 25 let. Fernandez a Ip [14] popisují ve své práci interakci Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu s remanentními tělesy planetezimálního disku. Význam této práce však nebyl zcela doceněn, a to až do doby objevů četných těles Kuiperova pásu. Malhotra [42], [41] poprvé ukázala, že existence těchto těles je zřejmě důsledkem migrace Neptunu, který se před začátkem migrace mohl nacházet i pod hranicí 20 AU, zatímco prvotní disk planetezimál se rozprostíral až do vzdálenosti přibližně 30–35 AU.

4.1 Dynamické příčiny planetární migrace

Z hlediska dynamiky můžeme rozlišovat mezi třemi hlavními typy migrace:

1. *Migrace v plynném disku* probíhá za přítomnosti pozůstatků zárodečné mlhoviny. Tuto migraci můžeme pozorovat v raných fázích vývoje planetárních systémů. Její příčinou je kromě tření planety o plyn (viz dále kapitola 5.1) také gravitační interakce mezi plynným diskem a planetou. Tento typ migrace zde nebude podrobněji rozebírán, podrobné informace lze nalézt například v [8].
2. *Prostá migrace* (angl. *simple migration*) probíhá v disku, ze kterého již byl primordiální plyn vypuzen, ale nachází se v něm stále podstatné množství planetezimál. Planetární migrace je pak důsledkem gravitační interakce s těmito tělesy během těsných přiblížení, konkrétně reakcí na změny v drahách malých těles, která díky svému gravitačnímu působení rozptyluje. Pokud by k přiblížením mezi planetou a malými tělesy mohlo docházet se stejnou pravděpodobností ve všech možných vzájemných orientacích, změny hlavní poloosy planety by měly charakter „náhodné chůze“. Pokud však bude k setkáním mezi planetou a malými tělesy docházet z určitého preferovaného směru, bude se za nepřítomnosti silnějších gravitačních perturbací ostatních planet velká poloosa planety plynule s časem měnit.

3. *Chaotická migrace* (angl. *chaotic migration*) nastává, pokud se planetární systém dostane do stavu dynamické nestability, během které mohou excentricity planet nabýt velmi vysokých hodnot. Z toho důvodu nelze vyloučit těsná přiblížení mezi planetami, která mají zpravidla za následek vypuzení jedné z planet mimo systém.

Poznamenejme, že planeta může i v relativně krátké časové škále (méně než 100 My) projít všemi výše uvedenými typy migrace. Například pozvolná prostá migrace může planetu dopravit do oblasti rezonance s jinou planetou, což způsobí dynamickou excitaci její dráhy. Vysoká excentricita pak může mít za následek těsné přiblížení k jiné planetě, a migrace se stane chaotickou. Vysoké amplitudy oscilací dráhy planety ale opět mohou být utlumeny dynamickým třením planetezimál, které dráhu planety cirkularizuje. Výsledkem pak může být opět kruhová dráha, ovšem s odlišnou velikostí hlavní poloosy.

Nejjednodušší analytické modely planetární migrace byly odvozeny ze studia vlastností systému jediné planety, obíhající v dynamicky chladném disku. Ida et al. [30] popsali rychlost změny velikosti hlavní poloosy a planety vztahem

$$\frac{da}{dt} = -2 \frac{\sqrt{a}}{M_p} \frac{dH_\times}{dt}, \quad (47)$$

kde M_p je hmotnost planety a dH_\times/dt je rychlost přenosu momentu hybnosti z planetezimálního disku na planetu. Tento vztah platí za předpokladu, že excentricita planety je malá, a hodnota gravitační konstanty $G \equiv 1$. S použitím aproximace nekonečné potenciálové jámy ukázali, že

$$\frac{dH_\times}{dt} = \frac{\varepsilon \bar{k}}{a} M(t), \quad (48)$$

kde ε je kombinací základních konstant a popisuje také geometrii přiblížení v blízkém okolí planety, $M(t)$ je celková hmotnost těles obíhajících v blízkém okolí planety, a \bar{k} je průměrná změna momentu hybnosti, která připadá na jednu interakci při blízkém přiblížení planetezimály jednotkové hmotnosti k planetě. Dosazením (48) do (47) dostáváme

$$\frac{da}{dt} = -2 \frac{\varepsilon \bar{k}}{\sqrt{a}} \frac{M(t)}{M_p}. \quad (49)$$

Časový vývoj $M(t)$ může být dále aproximován vztahem

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M}{\tau} + 2\pi a \left| \frac{da}{dt} \right| \sigma(a), \quad (50)$$

kde první člen popisuje rozpad planetezimální populace díky konečné dynamické životnosti τ planetezimál a druhý člen představuje planetezimály, které díky změně pozice planety vstupují do oblasti, kde mohou být planetou rozptýleny. $\sigma(a)$ je plošná hustota mateřského (nerozptýleného) disku v heliocentrické vzdálenosti a . Dosazením (49) do (50) dostáváme

$$\frac{dM(t)}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau} + 4\pi\sqrt{a} \varepsilon |\bar{k}| \frac{\sigma(a)}{M_p} \right) M(t). \quad (51)$$

Označíme-li nyní člen v závorce $-\tau^{-1} + 4\pi\sqrt{a} \varepsilon |\bar{k}| \sigma(a) M_p^{-1} \equiv \alpha$, a pro jednoduchost předpokládáme, že α se nemění s časem, dostáváme integrací pro celkovou hmotnost malých těles, jež mohou gravitačně interagovat s planetou, jednoduchou časovou závislost

$$M(t) = e^{\alpha t}. \quad (52)$$

V závislosti na koeficientu α můžeme rozlišit dva typy migrace:

1. *Tlumená migrace* (angl. *damped migration*): Je-li $\alpha < 0$, pak není ztráta planetezimál, způsobená jejich konečnou dynamickou životností, kompenzována přílivem nových planetezimál do oblasti v okolí planety. Planetezimální disk v okolí planety se tedy rozpadá, neboť $M(t)$ exponenciálně klesá k nule, a migrace planety se zastaví.
2. *Podporovaná migrace* (angl. *sustained migration*): Naopak, je-li α kladné, akvizice nových planetezimál do oblasti v okolí planety díky její migraci převyšuje ztráty způsobené gravitačním rozptylováním, $M(t)$ exponenciálně roste a migrace planety se urychluje. Tuto migraci můžeme dále rozdělit do dvou typů:
 - a) *Překotná migrace* (angl. *runaway migration*) nastává, jestliže je migrace podporována planetezimálami doplňovanými do okolí planety její vlastní migrací a není k tomu zapotřebí přítomnosti ostatních planet.
 - b) *Nucená migrace* (angl. *forced migration*) probíhá za podmínky, že je k přílivu nových planetezimál do okolí planety nutná přítomnost jiných planet.

Skutečné chování migrujících planet tedy závisí na poměru přílivu a odlivu planetezimál do/z oblasti jejich interakce s planetou.

4.2 Diskuze směru migrace

Jedním z omezení popsaného modelu je, že neposkytuje žádné informace o směru, kterým planeta migruje. Tato informace je však obsažena v hodnotě změny momentu

hybnosti \bar{k} . Připomeňme, že proces migrace je řízen gravitací při přiblíženích mezi planetami a částicemi disku. Uvažujme případ, kdy se dvě tělesa vůči sobě nacházejí na keplerovských drahách. Protože energie těchto stavů musí být zachována, vše, co může přiblížení způsobit, je *rotace vektoru relativní rychlosti mezi párem*. Následky takového přiblížení je proto možno ve většině případů snadno spočítat metodou *impulsové aproximace*. V této aproximaci platí, že v průměru (přes všechny impaktové parametry a relativní orientace) jsou planetezimály, které způsobují migraci planety směrem ven takové, pro jejichž z -ovou složku momentu hybnosti na jednotku hmoty

$$\tilde{H} = \frac{H}{m} = \frac{\vec{r} \times m\vec{v}}{m} = \sqrt{a(1-e^2)} \cos i \quad (53)$$

platí, že $\tilde{H} > \tilde{H}_P$ kde, \tilde{H}_P je velikost jednotkové z -ové složky momentu hybnosti planety. Opačný případ nastane pro planetezimály s $H < H_P$ [62]. V těchto vztazích jsou a , e , a i hlavní poloosa excentricita a sklon oběžné roviny planetezimály. Veličina \bar{k} je tedy funkcí rozložení momentu hybnosti těchto těles v oblasti, v níž dochází k interakci s planetou. Její velikost je kladná, jestliže pro většinu těles platí $H > H_P$, nulová, jestliže průměrné H je stejné jako H_P , a záporná v posledním případě.

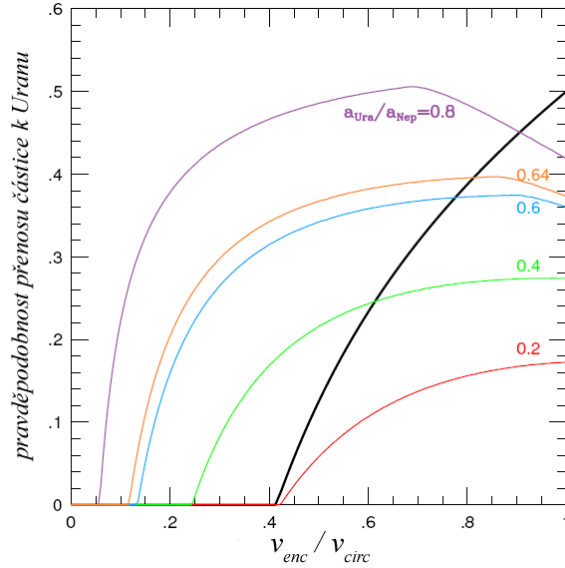
Hlavní fyzikální efekt, jenž nebyl zahrnut v odvození rovnice (51), byl vliv, který mají částice vstupující a opouštějící zónu interakce s planetou na \bar{k} . Pro jedinou planetu v disku nastávají pro částice dvě možnosti:

1. Částice mohou narazit na planetu. Protože pravděpodobnost nárazu na planetu je přibližně nezávislá na znaménku rozdílu ($H - H_P$), obecně tato možnost nezmění \bar{k} a migrace je ve výsledku nulová.
2. Dále může planeta částice z disku vypuzovat.¹¹ Tyto částice odnášejí energii,¹² a planeta se proto musí pohybovat směrem *dovnitř*.

V systémech s více planetami nastává další možnost – planetezimály mohou být přesunuty od jedné planety ke druhé. Nejlepší příklad poskytují čtyři obří planety sluneční soustavy. Numerické simulace ukazují, že díky interakci s diskem planetezimál se Jupiter pohybuje směrem dovnitř, ale ostatní tři planety směrem ven. Ukažme si to na příkladu Neptunu. Rychlost objektu v inerciálním přiblížení je

¹¹Schopnost planety vypuzovat částice závisí na dynamické excitaci disku, kterou charakterizujeme parametrem $v' \equiv v_{\text{enc}}/v_{\text{circ}}$, kde v_{enc} je typická rychlost částice vůči planetě a v_{circ} je kruhová rychlost planety. Bez ohledu na to, jakou má planeta hmotnost, nemůže částici vypudit, je-li $v' < v^*$, kde $v^* = \sqrt{2} - 1 \doteq 0,4$. Nicméně v' se zachovává jen v případě, že planeta je na kruhové dráze. Pokud tomu tak není, může k vypuzení dojít i v případě, že počáteční disk je dynamicky chladný.

¹²To znamená, že jejich celková energie $E = E_k + E_p$ stoupá.



Obrázek 3: Závislost pravděpodobnosti rozptylu částice Neptunem na dráhu s perihelovou vzdáleností menší, než je velká poloosa Uranu, na $v' = v_{enc}/v_{circ}$ pro různé poměry hlavních poloos Uranu a Neptunu a_U/a_N . Převzato z [40].

$\vec{v} = \vec{v}_{circ} + \vec{v}_{enc}$. Předpokládáme-li, že po interakci míří v_{enc} náhodným směrem, je pravděpodobnost vypuzení [40]

$$P_{eject} = \left(\frac{v'^2 + 2v' - 1}{4v'} \right), \quad (54)$$

kde $v' = v_{enc}/v_{circ}$. Na obrázku 3 je tato závislost vynesena černou křivkou. Pravděpodobnost, že bude částice přesunuta k Uranu (tedy že se dostane na dráhu s perihelovou vzdáleností $q < a_U$), závisí na v' a na poměru velikosti hlavních poloos Uranu a Neptunu a_U/a_N . Barevné křivky na obrázku 3 ukazují výsledky pro pět odlišných poměrů a_U/a_N , v současné době je $a_U/a_N = 0,64$ (oranžová křivka). Obrázek 3 ukazuje, že jestliže je $a_U/a_N > 0,3$ a $v' < 0,5$, bude převládat přesun planetezimál Neptunem k Uranu nad jejich vypuzováním. Celková energie těchto přenesených částic se tím sníží a z tohoto důvodu se bude Neptun pohybovat směrem ven.

Dosud jsme v procesu migrace planet předpokládali pouze události s jednotlivými planetezimály. Navíc však existují dva procesy, díky kterým se k planetě mohou přiblížit další planetezimály. První z nich je způsobená samotným procesem migrace. Jak se planeta pohybuje, dochází i k *pohybu oblasti interakce* s planetezimály, takže ji některé částice opouštějí a nové do ní vstupují. V případě, že

se planeta pohybuje směrem ven (tj. od Slunce), mají planetezimály, které oblast opouštějí, přirozeně $H < H_P$, a ty, které do ní vstupují, mají $H > H_P$. V případě, že se planeta pohybuje směrem dovnitř, je tomu naopak. Proto má tento proces tendenci *podporovat migraci*, která byla předtím nastartovaná jiným mechanismem.

Dalším zdrojem částic mohou být oblasti *rezonancí s planetou*. Tělesa, která jsou zachycena v rezonanci, mohou být nucena zvětšit svoji excentricitu natolik, že jejich dráha začne křížit dráhu planety [12]. Vliv tohoto zdroje na velikost \bar{k} závisí na profilu plošné hustoty planetezimálního disku a na intenzitě rezonančních perturbací.

4.3 Zachycení v rezonanci během migrace

Jedním z důsledků migrace planet je, že se příslušné oblasti rezonancí středního pohybu (MMR) také pohybují. Během tohoto procesu mohou být planetezimály, které se dostanou do oblasti MMR, v této oblasti zachyceny. Vývoj interakce částic s pohybující se rezonancí velmi citlivě závisí na počátečních podmínkách, povaze rezonance, rychlosti vývoje, případných disipativních procesech atd. Model, jehož vlastnosti byly podrobněji popsány, je model jediné rezonance v *adiabatické aproximaci*. V rámci této kapitoly popíšeme model odpovídající jediné planetě na kruhové dráze, která migruje pomalu a monotónně. Adiabatická podmínka je splněna, jestliže čas Δt potřebný k přesunu rezonance o heliocentrickou vzdálenost Δa , srovnatelnou s šířkou rezonance, je mnohem delší než librační perioda τ_{lib} orbit uvnitř rezonance (která je také o mnoho delší než časová škála oběhu). V tomto případě byla *pravděpodobnost zachycení v rezonanci* vypočítána semianalyticky [4].

Podle [59] může obecně dojít k rezonančnímu zachycení:

1. ve vnější rezonanci ($j : j + k$, $k > 0$), pokud se planeta pohybuje směrem ven
2. ve vnitřní rezonanci ($j : j + k$, $k < 0$), jestliže se planeta pohybuje směrem dovnitř.

Je namístě podotknout, že i když nastane jeden z uvedených případů, nemusí k záhytu v rezonanci s jistotou dojít. Například zachycení do rezonance 2:3 MMR s Neptunem (kde se nachází mnoho objektů Kuiperova pásu včetně Pluta) nastane podle adiabatického modelu s určitostí jen v případě, že Neptun migruje směrem ven a počáteční excentricita planetezimály je před přiblížením k rezonanci menší než

přibližně 0,03. Pravděpodobnost záchytu se zvyšujícími se excentricitami monotónně (ale ne lineárně) klesá: pro $e > 0,15$ je již menší než 10 %.¹³

Jestliže je objekt zachycen v rezonanci, pak se nadále pohybuje zároveň s ní.¹⁴ V průběhu migrace se excentricita objektu monotónně zvyšuje rychlostí určenou rychlostí migrace planety podle vztahu [42]:

$$e_f^2 = e_i^2 + \frac{J}{j+k} \ln \frac{a_{p,f}}{a_{p,i}}, \quad (55)$$

kde $a_{p,i}$ je hlavní poloosa planety v době, kdy těleso vstupuje do rezonance, e_i je excentricita tělesa v tomtéž čase, $a_{p,f}$ je hlavní poloosa planety v daném čase a e_f je konečná excentricita tělesa.

Těleso se ale v oblasti rezonance nemusí nacházet neomezeně dlouhou dobu, protože (je-li jeho excentricita dostatečně vysoká) může dojít k blízkým přiblížením k planetě. V případě migrace planety diskem jsou tedy planetezimály zachytávány v oblasti její rezonance a pohybují se společně s ní. Zároveň však narůstá jejich excentricita až do okamžiku, kdy dosáhne meze stability, nad níž jsou planetou rozptýleny. Rezonanční populace zůstává v přibližně početně ustáleném stavu takovou dobu, po jakou se oblast rezonance nachází v disku, protože zatímco objekty s vysokou excentricitou rezonanci opouštějí, nové do ní vstupují. Pokud ale rezonance překročí hranici disku, není již dále doplňovaná novými tělesy a rezonanční populace se s dalším pohybem rezonance směrem ven postupně rozpadá. Minimální excentricita těles rezonanční populace tedy postupně narůstá a relativní zastoupení těles s malou excentricitou postupně klesá.

Uvážíme-li, že nejdříve zachycená tělesa dosáhnou při pokračující migraci planety nejvyšších excentricit, může být vztah daný rovnicí (55) užitečný k odvození

¹³Bohužel reálné chování není tak jednoduché, jak adiabatický model předpovídá. Jestliže je rezonance obklopená chaotickou oblastí, jako v případě, kdy excentricita planety není nulová nebo sklon částic je velký, je výpočet pravděpodobnosti zachycení s využitím semianalytických technik v podstatě nemožný, neboť závisí také na rychlosti difúze vně chaotické oblasti [27]. Numerické simulace migrace Neptunu v realističtějších modelech planetárního systému ukazují, že pravděpodobnost záchytu je mnohem méně citlivá na excentricitu částice, než adiabatická teorie předpovídá, a zachycení v rezonanci je možné i při velkých excentricitách [19], [22].

¹⁴Komplikace nastává, pokud se v planetezimálním disku, přes který planeta migruje, objeví relativně velká tělesa. Zachycení v rezonanci vyžaduje, aby migrace planety byla hladká. Jestliže planeta skokově změní svoji hlavní poloosu díky setkání s jinou planetou nebo velmi hmotnou planetezimálou, skokově se změní i místo MMR. Jestliže je amplituda těchto skoků stejného řádu jako šířka rezonance nebo vyšší, částice zachycené v rezonanci budou uvolněny. Model *stochastické migrace* v planetezimálním disku byl nedávno vyvinut Murray-Clayem a Chiangem [47].

některých parametrů migrace. Například nacházejí-li se v rezonanční populaci tělesa s maximální excentricitou e_{\max} (která je menší než mez nestability), znamená to, že planeta migrovala o vzdálenost

$$\Delta a_p = \exp\left(\frac{j+k}{j}e_{\max}^2\right). \quad (56)$$

Malhotra [42] rozbořem excentricit těles v Kuiperově pásu v rezonanci 2:3 MMR zjistila hodnotu $e_{\max} = 0,25$, z čehož odvodila, že Neptun migroval nejméně 7 AU (tzn., že vznikl ve vzdálenosti $a \leq 23$ AU)¹⁵.

4.4 Jednoduchá migrace ve sluneční soustavě

Jak bylo popsáno v kapitole 4.3, rychlost a směr migrace planet řízené planetezimálami komplexně závisí na interakcích různých dynamických zdrojů a ztrátách částic disku. Proto je ke studiu migračních procesů nejlépe použít numerických experimentů.

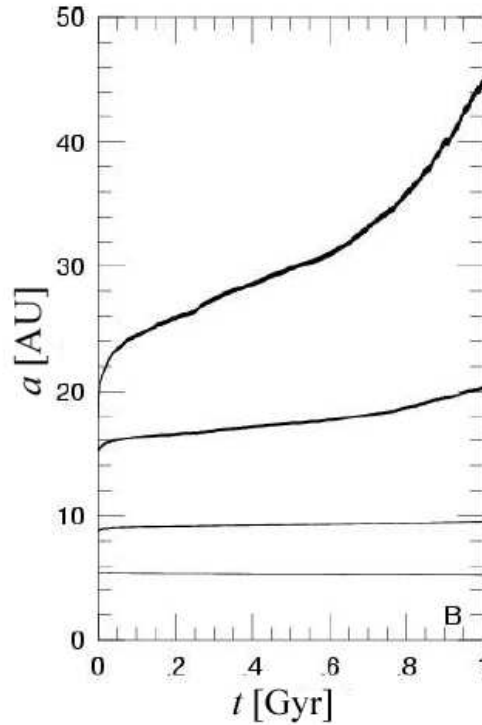
4.4.1 Migrace v rozlehlém disku

Následující simulace, popsané v [40], vyšly z totožných počátečních podmínek.¹⁶ Planety byly obklopeny hmotným diskem, který se rozprostíral mezi 18 AU a 50 AU a jeho plošná hustota klesala úměrně vzdálenosti. Vnější okraj disku byl zvolen tak, aby korespondoval s okrajem klasického Kuiperova pásu, a počáteční hmotnost disku se měnila v rozmezí 40 M_E (hmotnost Země) až 200 M_E .

Obrázek 4 ukazuje časový vývoj hlavní poloosy čtyř obřích planet pro disk o hmotnosti 50 M_E . Výsledkem je, že se planety Neptun, Uran a Saturn pohybovaly směrem ven, zatímco Jupiter směrem dovnitř, stejně jako v analytických modelech.

¹⁵Zatímco v adiabatickém modelu excentricita monotónně vzrůstá, ve skutečnosti zde mohou být sekulární členy, nutící objekty v rezonancích k oscilacím v excentricitě s vysokou amplitudou. Například Levison a Morbidelli [38] ukázali, že pokud se v MMR nashromáždilo dostatečně velké množství hmoty, planeta pocítí perturbace způsobené tímto materiálem a v precesním spektru planety se objeví nové frekvence, které jsou blízké libračním frekvencím, jež vykazují tělesa v rezonanci. Částice tedy mohou rezonovat s frekvencemi planetárního pohybu, které samy vyvolaly, což má za následek velké oscilace v jejich excentricitě. Za této situace může rezonanční populace dosáhnout excentricit blízkých nule, i když rezonance prošla vzdáleností 10 AU a posunula se za okraj disku.

¹⁶Planety Jupiter, Saturn, Uran a Neptun se na počátku nacházely ve vzdálenostech 5,45 AU, 8,7 AU, 15,5 AU a 17,8 AU.



Obrázek 4: Časový vývoj hlavní poloosy čtyř obřích planet v disku planetezimál o hmotnosti $50 M_E$. Převzato z [40].

Černé křivky na obrázku 5 ukazují časový vývoj velké poloosy Neptunu pro simulace s různými hmotnostmi disku. Běhy $40 M_E$ a $45 M_E$ jsou příklady tlumené migrace. Po rychlém startu se pohyb Neptunu začal zpomalovat a planeta dosáhla kvasisymptotické hlavní poloosy. Část disku vně dráhy Neptuna si zachoval svoji původní plošnou hustotu, zatímco část uvnitř dráhy byla kompletně rozptýlena.

Změna v chování Neptunu nastává ve chvíli, kdy hmotnost disku překročí $50 M_E$. Neptun nejdříve začne migrovat rychle, poté se migrace postupně zpomaluje, ale vzápětí je urychlena až k okraji disku, kde se nakonec zastaví. Takový vývoj naznačuje, že plošná hustota disku leží blízko kritické hodnoty, která odděluje tlumenou migraci od udržované. Ve všech případech s větší hmotností disku ležela konečná pozice Neptunu v blízkosti okraje disku. Z obrázku 5 je patrný přechod mezi lineární a akcelorovanou fází migrace, který nastal díky změnám v počtu částic zachycených v Neptunových rezonancích. Částice v rezonanci ovlivňují migraci, protože efektivně zvyšují Neptunovu inerciální hmotnost. Během prosté migrace je počet částic v rezonancích přibližně konstantní do doby, kdy rezonance zůstává v disku. V dané simulaci Neptun zrychluje ve chvíli, kdy jeho rezonance 1:2 MMR

opustí disk, takže počet těles v rezonanci klesá a nové částice nejsou doplňovány.

Při zvyšování hmotnosti disku na hodnoty vyšší než $100 M_E$ dochází k dalšímu důležitému zlomu v Neptunově chování – migrace přechází z *nucené* do *překotné*. Tato změna vyvolá velmi zajímavý jev – migrace Neptunu *není nadále monotónní*. Obrázek 5 ukazuje, že v případech vysokých hmotností disku Neptun dosáhne hranice 50 AU za méně než 3 miliony let a poté se přibližně stejnou rychlostí vrací zpět do vzdálenosti asi 30 AU. Takový průběh je dán tím, že při překotné migraci Neptunu směrem ven zůstávají planetezimály v excitovaném disku místo toho, aby byly přemístěny k vnitřním planetám nebo vypuzeny. Když Neptun dosáhne okraje disku, počet částic vně jeho dráhy (s měrným momentem hybnosti $H > H_N$) klesá a objekty *uvnitř* Neptunovy dráhy ($H < H_N$) vyvolají návrat planety. Směr migrace Neptunu se tedy obrátí. Nastane překotná migrace směrem dovnitř a skončí ve chvíli, kdy je dosaženo oblasti disku rozptýlené Uranem.

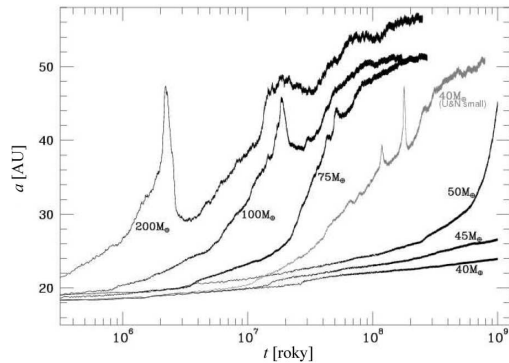
4.4.2 Omezení plynoucí z pozorování Kuiperova pásu

Přirozeně vyvstává otázka, zda je možné určit, jaký typ migrace se odehrál v naší sluneční soustavě, a zda odtud lze odvodit hmotnost a strukturu primordiálního protoplanetárního disku. Klíčová vodítka pro odhalení historie sluneční soustavy poskytuje mimo jiné *Kuiperův pás*, neboť jeho struktura v sobě stále nese stopy událostí, jež provázely rané fáze jejího vývoje. Z hlediska výše uvedeného jsou důležité zejména tři následující vlastnosti Kuiperova pásu:

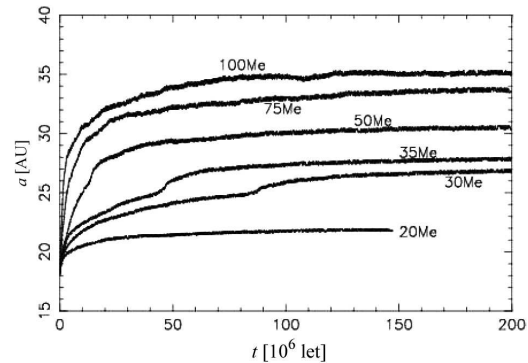
1. Současná hmotnost těles Kuiperova pásu je odhadována na $0,1 M_E$ [2]. To je překvapivá skutečnost vzhledem k tomu, že akreční modely předpovídají hmotnost $\geq 10 M_E$.¹⁷
2. Kuiperův pás je dynamicky excitován. Tato skutečnost je opět v rozporu s akrečními modely, jež ukazují, že relativní rychlosti mezi blízkými objekty musí být malé, aby se z nich v budoucnu vytvořila tělesa současných rozměrů.
3. Kuiperův pás podle současných poznatků končí na hranici přibližně 50 AU [1].

Gomes et al. [16] dospěli k závěru, že současná pozice Neptunu a hmotnostní deficit Kuiperova pásu implikují, že protoplanetární disk *původně* končil na hranici 30 AU. Ve své studii migrace v takovém disku ukazují, že planeta se nutně nemusí zastavit přesně na okraji disku. Ve skutečnosti, z důvodu nutnosti zachování momentu hybnosti během procesu migrace, závisí konečná pozice planety více na

¹⁷Tato hmotnost je potřebná k tomu, aby zde došlo k akreci transneptunických těles o pozorovaných velikostech 10^3 km, viz [54], [33], [34].



Obrázek 5: Časový vývoj velké poloosy Neptunu pro simulace s různými hmotnostmi disku. Převzato z [40].



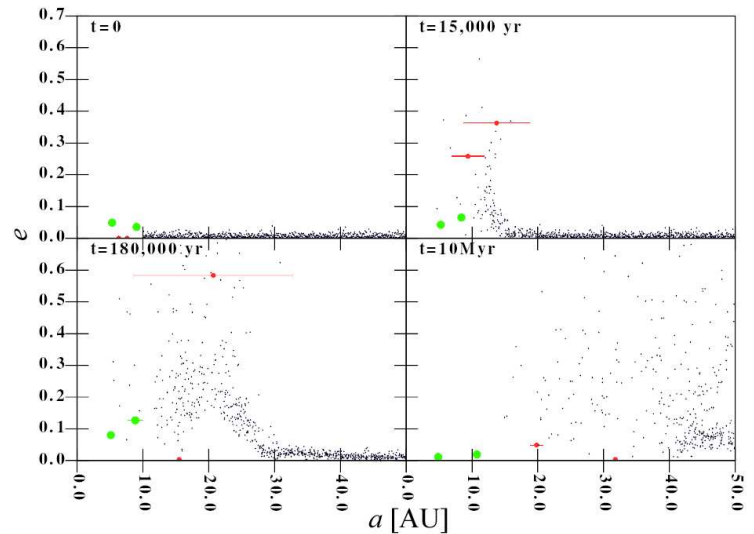
Obrázek 6: Migrace Neptunu v discích ve vzdálenostech mezi 10 a 30 AU a s hmotnostmi od 20 do 100 M_E . Převzato z [40].

momentu hybnosti disku než na poloze jeho okraje. Obrázek 6 ukazuje průběh migrace Neptunu v šesti různých discích, rozprostřených ve vzdálenostech mezi 10 a 30 AU a s hmotnostmi od 20 do 100 M_E .

Disk s hmotností 20 M_E má podkritickou plošnou hustotu. Neptun vykazuje tlumenou migraci a zastavuje se hluboko uvnitř disku. Disky s hmotností 30 a 35 M_E mají plošnou hustotu blízkou kritické hodnotě. V obou případech doputuje oblast disku ovlivněná Neptunovými perturbacemi k jeho okraji poté, co planeta dosáhne vzdálenosti přibližně 26 AU. Migrace planety je rychle utlumena blížícím se okrajem disku a její konečná poloha leží asi 2 AU od původního okraje disku, jehož část za planetou byla zcela rozptýlena. Disky s větší počáteční hmotností mají nadkritickou plošnou hustotu. V případě disku s hmotností 50 M_E planeta zastaví téměř na okraji disku a v ostatních případech až několik AU za jeho okrajem.

Gomes et al. tedy došli k závěru, že disk s okrajem sahajícím přibližně do vzdálenosti 30 AU (přesná hodnota závisí na hmotnosti disku) může vysvětlit současnou hodnotu velikosti velké poloosy Neptunu.¹⁸ Zdůrazněme, že malý poloměr oříznutého disku není v rozporu se skutečností, že se dnes Kuiperův pás rozkládá za hranicí 40 AU, protože mohl být vytlačen ven během migrace Neptunu.

¹⁸Existuje zde nejméně pět mechanismů, které mohly protoplanetární disk „oříznout“ v tak malé heliocentrické vzdálenosti ještě před akrecí planet: 1) Kuiperův pás byl ovlivněn gravitačními slapy od blízko procházející hvězdy [30], [37]; 2) Okraj se vytvořil před formací planetezimál díky tření o plyn [69]; 3) okraj se vytvořil v průběhu planetární akrece díky radiální migraci způsobené třením [68]; 4) Blízké hvězdy raných typů způsobily fotoevaporaci vnějších oblastí sluneční mlhoviny před tím, než se stačily planetezimály vytvořit [29]; 5) Magneto–hydrodynamické nestability ve vnější oblasti disku bránily vzniku planetezimál v tomto regionu [55].



Obrázek 7: Závislost excentricity e na velké poloose a pro simulaci vzniku Uranu a Neptunu mezi drahami Jupiteru a Saturnu. Převzato z [57].

4.5 Model vzniku Uranu a Neptunu mezi Jupiterem a Saturnem

Až do této chvíle jsme diskutovali jednoduchou migraci. Existuje však i jiný způsob, jakým mohou interakce mezi planetami a malými tělesy vyústit ve znatelné změny velkých poloos planet. Je jím *celková nestabilita* v planetárním systému. Přiblížení planet zvyšuje excentricity jejich drah a odstupy mezi velkými poloosami. Následné interakce mezi částicemi disku a planetami ovšem planetární dráhy cirkularizují.

Tuto myšlenku vyslovili Thommes et al. [60], kteří předpokládali, že čtyři obří planety vznikly v tak kompaktní konfiguraci, že jejich dráhy byly dynamicky nestabilní. Obrázek 7 ukazuje závislost excentricity e na velké poloose a pro jednu ze simulací, kde ledoví obří vznikli mezi drahami Jupiteru a Saturnu. Takřka bezprostředně po svém vzniku (10^4 let) byli ledoví obří vypuzeni z oblasti mezi Jupiterem a Saturnem do primordiálního planetezimálního disku, kde byly jejich dráhy gravitačními interakcemi s částicemi disku cirkularizovány. Gravitační interakce mezi planetezimálami a vypuzenými jádry se vyskytuje ve dvou podobách:

1. *Sekulární změny* – Jsou zde patrné sekulární změny v disku, vyvolané zvýšenými excentricitami ledových obrů. To je velmi dobře viditelné na dolním levém obrázku ($t = 180\,000$ let), kde tělesa mezi 20 a 30 AU mají systematicky zvětšované excentricity. Protože tato oblast disku je hmotnější než ledoví obří, sekulární perturbace zvětší periheliové vzdálenosti ledových obrů, takže se

vzdálí od Saturnovy dráhy, a tak je „zachrání“ před vyvržením do mezihvězdného prostoru.

2. *Dynamické tření* – projevuje se tam, kde se velké těleso pohybuje v „moři“ malých částic. Přitom se cirkularizují dráhy ledových obrů.

Problém tohoto vývojového scénáře však spočívá v tom, že disk, který má hmotnost dostatečnou k tomu, aby cirkularizoval dráhy ledových obrů, způsobí jejich migraci do příliš velkých vzdáleností.

4.6 Model z Nice dynamického vývoje obřích planet

Teorie vzniku planetárních systémů předpokládá, že velké planety vznikly na kruhových a koplanárních drahách. Tato skutečnost však neodpovídá dnešnímu pozorování. Model z Nice [40] vysvětluje všechny důležité charakteristiky oběžných drah obřích planet, zejména velikosti jejich velkých poloos, excentricit a sklonů a ukazuje, že planetární soustava s počátečními kvazi-cirkulárními a koplanárními drahami může být prekurzorem sluneční soustavy s dnešními parametry za předpokladu, že planety Jupiter a Saturn prošly rezonancí středních pohybů 1:2. Průchod touto rezonancí nastal díky migraci planet, způsobené jejich interakcí s planetezimálním diskem.

V předchozích kapitolách jsme ukázali, že migrace planet je přirozeným důsledkem vzniku a vývoje planetárních systémů. Poté, co vznikly obří planety a ze zárodečného oblaku byly odstraněny zbytky plynu, sestávala sluneční soustava ze Slunce, planet a (dynamicky chladného) disku drobných těles – planetezimál. Tento disk byl planetami postupně dynamicky erodován, což vedlo buď ke konstruktivním srážkám planetezimál, nebo k jejich rozptýlu. Planetární migrace byla důsledkem výměny momentu hybnosti mezi planetami a částicemi tohoto disku. Numerické simulace potvrzují, že Jupiter byl tímto mechanismem tlačěn dovnitř, směrem ke Slunci, zatímco planety Saturn, Uran a Neptun migrovaly směrem ven. Rozložení drah transneptunických objektů je patrně důsledkem této migrace a ukazuje, že planeta Neptun se před začátkem migrace musela nacházet hluboko pod hranicí 20 AU, zatímco disk sahal přibližně do vzdálenosti 30–35 AU.

Pokud byly dráhy planet na počátku migrace dostatečně blízko sebe, musely projít rezonancemi malých řádů.¹⁹

¹⁹Rezonance popisujeme poměrem $\frac{p+q}{p}$, řádem rezonance nazýváme hodnotu q . Poruchová funkce, popisující rezonanci potom obsahuje členy úměrné e^q a $(\sin i)^q$. Perturbace jsou nejvýraznější pro malá q . Vývoj sluneční soustavy nejvíce poznamenala rezonance Jupiteru a Saturnu v poměru 1:2,

4.6.1 Nastavení počátečních podmínek

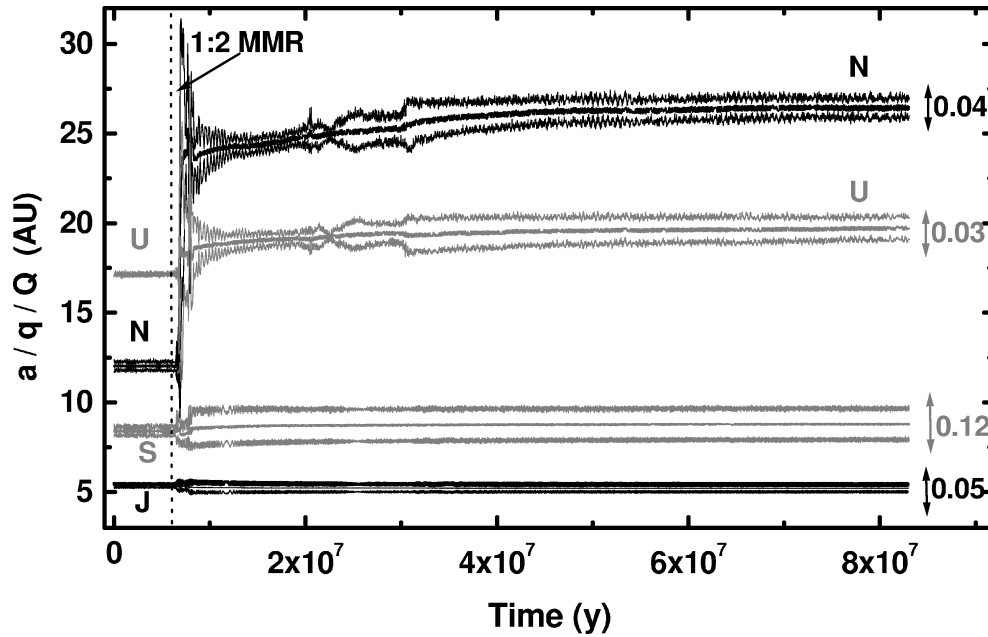
Ve všech simulacích byly počáteční podmínky nastaveny tak, že hlavní poloosa Jupiteru byla $a_J = 5,45$ AU a Saturn byl umístěn o několik desetin astronomické jednotky blíže ke Slunci vzhledem k hranici rezonance 1:2 s Jupiterem ($a_{J:S} (1 : 2) \doteq 8,65$ AU). Počáteční velké poloosy ledových obrů Uranu a Neptunu byly nastaveny v rozmezích 11–13 AU, resp. 13,5–17 AU, přičemž byla stanovena minimální vzájemná vzdálenost 2 AU. Ve všech případech byly dráhy takřka kruhové a koplanární ($e, i \simeq 10^{-3}$). V simulacích byl uvažován disk planetezimál o hmotnosti 30–50 M_E , který sestával z 1 000–5 000 těles stejné hmotnosti. Počátek disku byl ztotožněn s drahou poslední planety a končil ve vzdálenosti 30–35 AU od Slunce. Plošná hustota tohoto disku lineárně klesala s rostoucí vzdáleností od Slunce. Ukázalo se, že přestože toto rozlišení nedostačuje k modelování všech aspektů planetární migrace, adekvátně modeluje makroskopický vývoj drah planet. V simulacích byl uvažován jak dynamicky chladný ($e \doteq \sin i \doteq 10^{-3}$), tak dynamicky horký ($e \doteq \sin i \doteq 0,05$) disk. Simulace byly prováděny s pomocí dvou N-částicových integrátorů, SyMBA [36] a MERCURY [7] s krokem 0,25–0,5 roku. Gravitační interakce mezi malými tělesy disku byly v těchto simulacích zanedbány.

4.6.2 Výsledky simulací a vývoj drah ledových obrů

Typický vývoj planet a planetezimálního disku, který vidíme na obrázku 8, můžeme posat takto:

1. Po fázi dlouhé pomalé migrace po téměř kruhových drahách, která v této simulaci trvala 6,6 milionu let, prošly Jupiter a Saturn rezonancí 1:2 MMR. V tomto bodě došlo ke zvýšení jejich excentricit k hodnotám blízkým těm, které dnes pozorujeme.
2. Tento náhlý skok v excentricitách Jupiteru a Saturnu měl dramatický dopad na planety Uran a Neptun. Sekulární perturbace, kterými Jupiter a Saturn na další ledové obry působily, způsobily nárůst jejich excentricit na hodnotu $\simeq 0,1$, (která je závislá na hmotnostech a velkých poloosách všech planet).
3. Díky kompaktní konfiguraci systému se planetární dráhy staly chaotickými a začaly se křížit, důsledkem čehož docházelo krátce po průchodu rezonací J:S 1:2 k blízkým přiblížením planet. To mělo za následek i zvýšení jejich sklonu o 1–7°.

jež způsobuje největší perturbace.

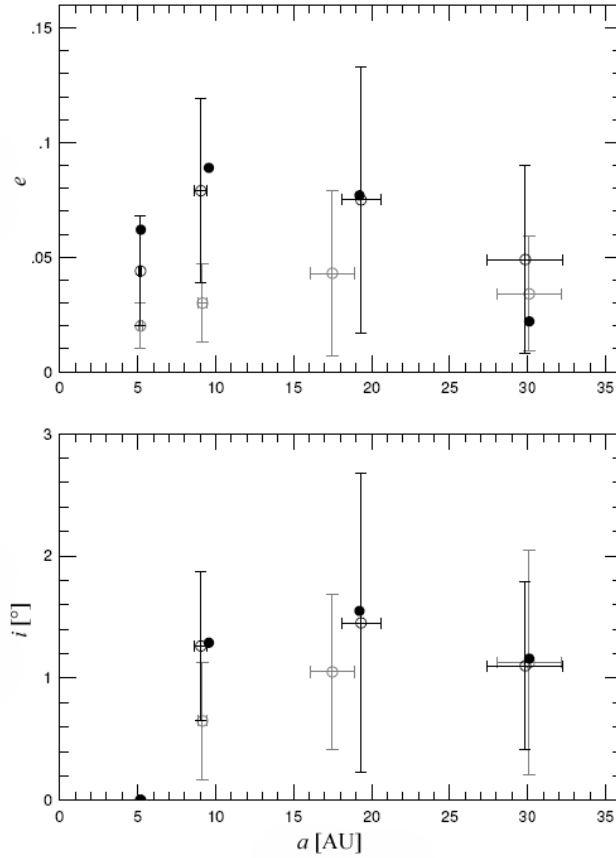


Obrázek 8: Vývoj velkých poloos, pericenter a apocenter drah velkých planet předpokládaný modelem z Nice. Převzato z [40].

4. Navíc byli oba ledoví obři vytlačeni směrem do planetezimálního disku, což mělo za následek zvýšení toku malých těles směrem k Saturnu a Jupiteru, a tím pádem i zvýšení rychlosti jejich migrace.
5. Během této rychlé fáze migrace došlo k pozvolnému poklesu excentricit a sklonů planet v důsledku dynamického tření.
6. Migrace planet ustala poté, co byl původní planetezimální disk takřka úplně rozptýlen a planetární systém byl stabilizován.

Jak ukazuje obrázek 8, nejen velké poloosy, ale i excentricity výsledných drah planet jsou blízké současným hodnotám. Podoba výsledných drah planet závisí na vývoji systému bezprostředně po průchodu planet rezonancí. Přestože bylo v počátečních podmínkách mnoho volných parametrů, ukázalo se, že finální konfigurace je nejvíce citlivá na počáteční orbitální separaci ledových obrů (Δa_{II}) a vzdálenosti mezi Saturnem a vnitřním ledovým obrem (Δa_{IS}). V provedených simulacích bylo Δa_{II} v rozpětí 2 – 6 AU a Δa_{IS} v rozmezí 2,5–5 AU.

Pro $\Delta a_{II} < 3$ AU roste pravděpodobnost, že Saturn *destabilizuje* dráhu jednoho z ledových obrů tak, že bude křížit dráhu Jupitera. V takovém případě je ledový obr vypuzen ze systému, k čemuž došlo ve 33 % simulací. Ve zbylých 67 % případech dosáhly všechny čtyři planety stabilních drah.



Obrázek 9: Porovnání výsledků modelu z Nice s pozorovanými hodnotami velkých poloos, excentricit a sklonů drah velkých planet. Šedě jsou vyznačeny výsledky simulací v méně kompaktní konfiguraci ($\Delta a_{rmIS} \geq 3,5$ AU), černě je vyznačena varianta, při níž došlo k blízkému setkání Saturnu s ledovým obrem ($\Delta a_{rmIS} > 3,5$ AU) Převzato z [58].

Jen v necelých 5 % případech nedošlo k žádným blízkým přiblížením obřích planet. V těchto bžích byla nastavena hodnota $\Delta a_{IS} = 5$ AU, což znamená, že se jednalo o nejméně kompaktní počáteční konfigurace. Opakovaná setkání ledových obrů byla zaznamenána ve všech ostatních 95 % případech. Tam, kde byla nastavena počáteční $\Delta a_{IS} \geq 3,5$ AU, došlo k blízkému přiblížení mezi ledovými obry; pro $\Delta a_{IS} < 3,5$ AU docházelo rovněž k blízkým setkáním Saturnu s ledovým obrem. Přiblížení ledového obra k Saturnu zároveň ovlivňuje dynamiku systému Jupiter–Saturn, a umožňuje tak plynným obrům udržet si své excentricity navzdory dynamickému tření v disku.

Pro tyto dvě uvedené varianty průběhu simulací (tj. kompaktní a méně kompaktní konfigurace) byly ze všech dosažených výsledků vypočítány standardní odchylky a střední hodnoty velkých poloos, excentricit a sklonů. Uvedené veličiny byly vyne-

seny do grafů (e, a) a (i, a) , kde byly zároveň porovnány se současnými parametry planet (obrázek 9). Obě skupiny simulací vykazují dobré výsledky, nicméně varianta, při níž došlo k interakci ledových obrů se Saturnem, je evidentně lepší.

Konečná vzdálenost drah Jupiteru a Saturnu závisí na hmotnosti planetezimálního disku. Ačkoli se zvyšující se hmotností disku roste jeho schopnost stabilizovat celý systém, pro hmotnosti větší než 35-40 M_E vychází rozdíl velkých poloos Jupiteru a Saturnu větší než je dnes pozorovaný. A pro disky s hmotností $> 50M_E$ již Saturn projde rezonancí 2:5 s Jupiterem, což je v rozporu se současnou polohou Saturnu, který se nachází těsně před 2:5 rezonancí. Proto považujeme hmotnost disku okolo 35 M_E za nejpravděpodobnější.

4.7 Pozorování podporující model z Nice

4.7.1 Zachycení Jupiterových Trojanů

Další argumenty pro model z Nice pocházejí z pozorovaných populací malých těles. Například Jupiterovi Trojané, malá tělesa nacházející se v rezonanci 1:1 MMR s Jupiterem (v okolí Lagrangeových bodů L_4 , L_5 soustavy Slunce–Jupiter), poskytují významný test popsaného scénáře. Gomes [18] a Miščenko et al. [43] studovali efekty planetezimálními řízené migrace na trojanské asteroidy. Zjistili, že populace Jupiterových Trojanů se stává při průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí 1:2 MMR zcela nestabilní. Tito autoři tedy původně dospěli k názoru, že planety Jupiter a Saturn touto rezonancí projít nemohly.

Řešení tohoto problému představili autoři modelu z Nice [40], kteří upozornili na to, že dynamický vývoj každého gravitačního systému je *časově reverzibilní*. Pokud se planetární systém vyvine do konfigurace, v níž zachycené objekty mohou opustit Lagrangeovy body, musí být možné, aby jiná tělesa do této oblasti vstoupila a byla zde dočasně zachycena. Následně může být vytvořena nová populace Trojanů za předpokladu, že je k dispozici dostatečný zdroj takových těles. V tomto případě jsou zdrojem tytéž objekty, které způsobují planetární migraci – transneptunické planetezimály. Když se Jupiter a Saturn dostatečně vzdálí od 2:1 MMR, stane se tato oblast Lagrangeových bodů opět stabilní a populace, která se zde náhodně nacházela, zůstane zachycena a stává se Jupiterovými Trojanými. Autoři modelu z Nice provedli řadu N -částicových simulací a dokázali, že na drahách Trojanů mohou být skutečně tělesa trvale zachycena. Za předpokladu, že planetezimální disk měl hmotnost 35 M_E , předpovídají, že zde mohli existovat Trojané s celkovou hmotností

$4 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-5} M_E$ a s amplitudou librace do 30° . To je v dobré shodě s celkovou hmotností Trojanů, která je odhadovaná na $1,1 \cdot 10^{-5} M_E$ [45].

Jedním z překvapivých aspektů populace Trojanů je široké rozmezí sklonů, které sahají až ke 40° , což nemůže být vysvětleno pomocí tradičních scénářů. Protože model z Nice je zatím jediný, který dokáže danou skutečnost reprodukovat, můžeme populaci Trojanů považovat za pozorovatelný důsledek průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí 1:2.

Jupiter není jedinou planetou ve vnější sluneční soustavě, která má své Trojany. Také u Neptunu se takové objekty nacházejí a jejich existenci lze opět vysvětlit pomocí modelu z Nice. Tyto objekty mohly být zachyceny v Neptunově 1:1 MMR během období, kdy byla excentricita jeho dráhy tlumena planetezimálním diskem.²⁰

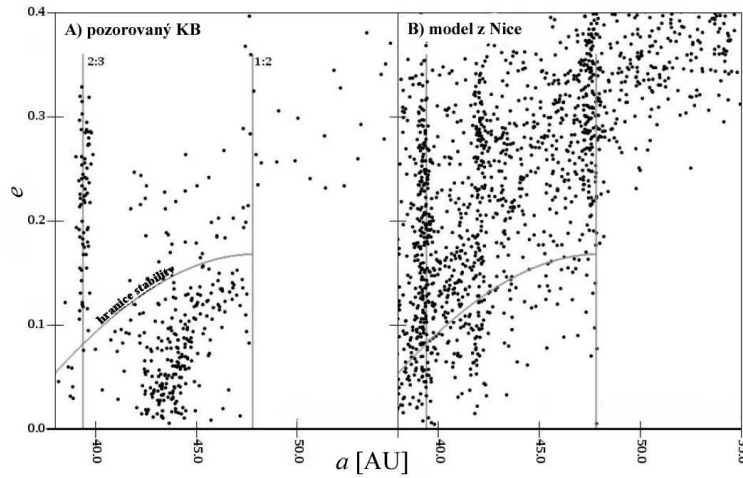
4.7.2 Kuiperův pás

Kuiperův pás také představuje důležitý test pro ověření platnosti modelu z Nice. Každý model procesů probíhajících ve vnějších oblastech sluneční soustavy totiž musí vysvětlit hlavní vlastnosti orbit těles Kuiperova pásu, zejména:

1. přítomnost objektů zachycených v Neptunových rezonancích (viz obrázek 10A);
2. náhlý konec klasického Kuiperova pásu v blízkosti 1:2 MMR (klasický Kuiperův pás definujeme jako systém těles, která nejsou v rezonancích a nacházejí se pod mezí stability určenou Duncanem et al. [12]);
3. úbytek těles s velkou poloosou v rozmezí 45–48 AU a s $e < 0,1$;
4. koexistenci dvou zdánlivě odlišných populací Kuiperova pásu: dynamicky chladné populace, složené z těles se sklonem $i < 4^\circ$, a dynamicky horké populace, jejíž sklony mohou dosahovat až 30° i více. Tyto populace mají odlišné rozdělení velikostí [2] a odlišné barevné indexy [61].

Z důvodů diskutovaných výše model z Nice předpokládá konec protoplanetárního disku na hranici přibližně 30 AU. Z toho plyne, že Kuiperův pás, který dnes pozorujeme, musel být vytlačen směrem ven během vývoje dráhy Neptunu. Když excentricita dráhy Neptunu dosáhla dočasně excentricity asi $e_N \simeq 0,3$, jeho oblasti rezonancí byly ve velké poloose velmi široké. Numerické simulace ukazují, že pro $e_N > 0,2$ je celá oblast uvnitř 1:2 MMR vyplněna vzájemně se překrývajícími rezonancemi vyšších řádů, a je proto zcela chaotická. Následně se proto může naplnit částicemi disku rozptýlenými Neptunem a migrovat spolu s ním směrem ven,

²⁰K záchytu jednoho Trojana u Neptunu došlo také při naší provedené simulaci migrace Neptunu do disku planetezimál, viz kapitola 6.



Obrázek 10: A) Závislost excentricity těles pozorovaného Kuiperova pásu na velké poloose dráhy v porovnání s B) výsledky modelu z Nice. Převzato z [40].

k větším velkým poloosám. Jak Neptunova excentricita díky interakci s planetezimálami klesá, mnoho z těchto těles je v Kuiperově pásu zanecháno na ne-rezonančních drahách. Díky tomu, že se na počátku nacházela rezonance 1:2 až za okrajem disku, vytvořila přirozenou hranici zachycené populace.

Obrázek 10B ukazuje výsledek numerické simulace tohoto procesu. S uvažováním, že většina částic nad hranicí stability by byla na dlouhé časové škále (4 miliardy let) ze systému vypuzena, musíme konstatovat velmi dobrou shodu mezi simulovanou a skutečnou populací. Na hranici 1:2 MMR pozorujeme okraj Kuiperova pásu a rezonanční populace jsou zde dobře viditelné. Výsledek simulace také ukazuje úbytek těles s malou excentricitou za hranicí 45 AU.

4.7.3 Pozdní bombardování Měsíce

Pozdním bombardováním Měsíce označujeme etapu ve vývoji Měsíce, která nastala přibližně před 3,9 miliardy let, během které vzniklo množství impaktivních pánví, jejichž stáří dokážeme radiometricky datovat (díky vzorkům přivezeným loděmi Apollo). Dosud probíhá debata, zda tato fáze provázela pozdní období planetární akrece, nebo zda se jednalo o zvýšenou impaktní činnost, trvající méně než 100 Myr. Přestože tato debata dosud pokračuje, ukazuje se stále pravděpodobnější druhá varianta [25], [39].

Zvýšený tok impaktorů ve vnitřních oblastech sluneční soustavy patrně vyžadoval významné změny parametrů drah planet, které destabilizovaly zásobárny

malých těles, do té doby stabilní [39]. Model z Nice takové změny přirozeně předpovídá při průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí 1:2. Problém, který byl následně vyšetřován, byl, jak pozdržet rezonanci o zhruba 700 milionů let od vzniku sluneční soustavy. V simulacích začaly planety migrovat prakticky ihned, protože planetezimaly byly umístěny k planetám velmi blízko, a systém byl proto značně nestabilní. Tato konfigurace byla zvolena ke studiu vlastního procesu migrace a průchodu rezonancí, ale to neznamena, že musela časově korespondovat se vznikem sluneční soustavy, mohla nastat až později. Planetezimálami řízená migrace patrně nehraje pro dynamiku planet důležitou roli do doby, kdy v disku přetrvávají zbytky původní plynné mlhoviny. Počáteční podmínky pro simulace migrací reprezentují systém, který existoval až v době, kdy se mlhovina rozpadla, tedy systém, ve kterém je dynamická životnost částic disku vyšší než životnost mlhoviny.

Průchod Jupiteru a Saturnu rezonancí 1:2 MMR je možno v závislosti na různých počátečních podmínkách zpozdít o 350 My až 1,1 Gy [17], což znamená, že celková nestabilita vyvolaná průchodem 1:2 MMR může být odpovědná za pozdní bombardování Měsíce. Pro počáteční disk o hmotnosti $35 M_E$ mohlo po průchodu rezonancí dopadnout na povrch Měsíce přibližně 8×10^{18} kg planetezimálního materiálu [17], což je hodnota řádově shodná s odhadem učiněným na základě pozorování impaktových pánví [39].

5 Migrace planet v extrasolárních planetezimálních discích

Migrace planet v extrasolárních planetezimálních discích je zatím poměrně těžko obecně popsitelná, protože migrace velmi citlivě závisí na specifických vlastnostech systému, jako je počet planet a poměr jejich hmotností, jejich vzájemná vzdálenost, hmotnost disku a jeho radiální šíře, radiální profil jeho plošné hustoty atd. Většina těchto veličin je obtížně měřitelná, proto se zaměříme jen na čtyři hlavní aspekty: původ horkých Jupiterů, vývoj systémů s dvěma planetami, únik planet středních hmotností do velkých vzdáleností od mateřských hvězd a spouštěcí mechanismy pozdních nestabilit.

5.1 Původ horkých Jupiterů

Mezi prvními objevenými extrasolárními planetami bylo mnoho *horkých Jupiterů*, tj. planet s hmotností řádově srovnatelnou s Jupiterem, které však obíhají v extrémně malých vzdálenostech od centrální hvězdy, řádově i 10^{-2} AU [53].²¹ Přirozeně proto vyvstává otázka, jak pozorovanou skutečnost fyzikálně interpretovat.

Jak jsme dříve poznali, jediná planeta (hmotnosti Jupitera nebo větší) obklopená planetezimálním diskem migruje směrem dovnitř, protože většinu planetezimál, se kterými interaguje, vypudí ven. Murray et al. [46] ukázali s uvážením minimální hmotnosti planetezimálního disku (pevné složky Hayashiho minimální hmotnosti mlhoviny, viz vztah 40), že migrace Jupiteru byla velmi tlumená a tato planeta se významně nepohnula. Nicméně dále ukázali, že pokud je hustota disku podstatně vyšší (15- až 200-krát), migrace může přejít do překotného režimu. Ta může transportovat planetu směrem dovnitř, do vzdáleností k centrální hvězdě, které jsou srovnatelné s těmi, jež pozorujeme v extrasolárních planetárních systémech.

Alternativní teorií, vysvětlující původ horkých Jupiterů, je tření těchto planet o plynný disk. Na konci kapitoly 2 bylo poznamenáno, že v hmotných planetezimálních discích mohlo být splněno Jeansovo kritérium, takže plynní obři zde mohli vzniknout přímou fragmentací zárodečného oblaku.²² Interakce obíhající planety s plynným diskem má za následek zpomalování její oběžné rychlosti, takže se planeta

²¹Pro srovnání, nejuvnitřnější planeta sluneční soustavy Merkur obíhá okolo Slunce ve střední vzdálenosti 0,378 AU.

²²Jedná se tedy o jiný model, než zde byl od počátku popisovaný – velká planeta se v disku vyskytuje již v době, kdy je v něm ještě přítomen plyn!

po spirále přibližuje k centrální hvězdě. To je důsledkem přítomnosti tlakového gradientu v plynu, který se projevuje tím, že na obíhající plyn působí zrychlení $-1/\rho \cdot dP/dr = g$, které míří proti směru gravitace. Tlakový gradient proto způsobuje, že plyn obíhá pomaleji než v něm vnořená planeta, a proto mezi nimi dochází ke tření, díky kterému se planeta postupně po spirále přibližuje k centrální hvězdě. Plynný disk však nesahá přímo k povrchu hvězdy – mezi ním a hvězdou zeje mezera, na jejímž okraji se planeta zastaví.

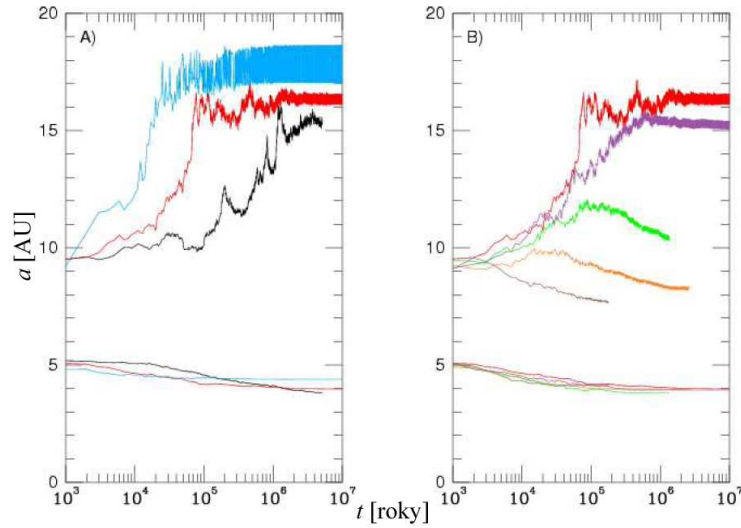
Vznik mezery v disku si vysvětlujeme tím, že hvězda je zdrojem ultrafialového záření, které ionizuje okolní plyn. Disk v blízkém okolí hvězdy je proto tvořen ionizovaným plynem, zatímco ve větších vzdálenostech se již nachází plyn neutrální. Částice ionizovaného plynu interagují s magnetickým polem hvězdy, které rotuje společně s ní. Na ionizovaný plyn proto působí Lorenzova síla $F_L \cong (\vec{v} - \vec{v}_m) \times \vec{B}$, která je závislá na rozdílu oběžné rychlosti částice v a rychlosti rotace magnetického pole v_m . Mohou tedy nastat dva mezní případy:

1. Pokud je $v > v_m$, je částice ionizovaného plynu magnetickým polem zpomalována a po spirále padá ke hvězdě. Tato situace nastává uvnitř korotující orbity.
2. Pokud je $v < v_m$, je částice magnetickým polem urychlována a materiál je z oblasti, kde platí uvedená podmínka, transportován dále od hvězdy.

Výsledkem popsaného mechanismu je mezera, která se vytvoří mezi plynným diskem a centrální hvězdou. Planeta, která se díky tření o plyn spirálovitě přibližuje ke hvězdě, se proto na okraji této mezery zastaví a dále obíhá přibližně kruhovou rychlostí.

5.2 Migrace v dvouplanetárních systémech

Dvouplanetární systémy jsou zajímavé i proto, že mají mnoho charakteristik společných se systémy s větším počtem planet. V sérii simulací [58] byla simulována migrace dvou planet na současných drahách Jupiteru a Saturnu v disku sahajícím od 6 do 20 AU, obsahujícím hmotu o celkové hmotnosti 1,2-násobku součtu hmotností planet. Ve všech takových případech dojde k nucené migraci. Pokud mají Jupiter a Saturn své současné hmotnosti, Jupiter migruje směrem dovnitř a Saturn směrem ven (černé křivky na obr. 11a), obdobně jako v případě čtyř planet. V uvedených simulacích byla sledována závislost migrace na celkové hmotnosti planet $M_J + M_S$. Zvýšení hmotnosti disku a planet na 3-násobek, respektive 10-násobek mělo za následek vývoj popsany modrou, resp. červenou křivkou na obrázku 11a.



Obrázek 11: Časový vývoj velkých poloos obřích planet při simulaci migrace v dvouplanetárním systému. A) migrace Jupiteru a Saturnu v disku rozkládajícím se ve vzdálenosti od 6 do 20 AU v závislosti na hmotnosti disku a planet. Černá křivka znázorňuje simulaci s hmotnostmi ekvivalentními Jupiteru a Saturnu, červená a modrá křivka popisuje vývoj, kdy byla hmotnost disku i planet trojnásobně, respektive desetinásobně, vyšší. B) Simulace s konstantní celkovou hmotností planet, ale s různým hmotnostním poměrem planet. Červená, fialová, zelená, oranžová a hnědá křivka odpovídají simulacím s poměrem hmotností vnitřní a vnější planety 10:3, 2:1, 3:2, 1:1 a 1:2. Převzato z [40].

Tato chování jsou si vzájemně podobná, jediný podstatný rozdíl je v časové škále migrace. Vysvětlením takového chování je, že pro hmotnější planety nastávají díky většímu gravitačnímu účinnému průřezu častěji blízká přiblížení planet a planetezimal, což způsobuje rychlejší migraci planet.

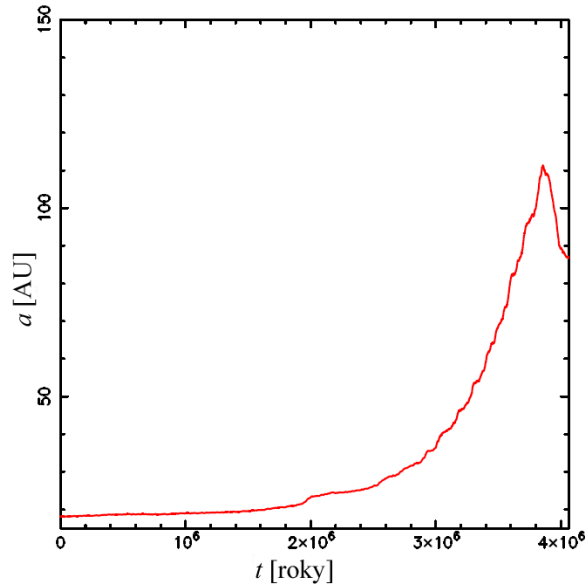
V druhé sérii simulací byla celková hmotnost planet konstantní (trojnásobek hmotnosti Jupiteru a Saturnu), ale měnil se jejich poměr. Výsledky těchto simulací ukazuje obrázek 11b. Pro hmotnostní poměr $M_J/M_S > 2$ vnější planeta vždy migruje směrem ven, nicméně pro $M_J/M_S < 2$ se vnitřní planeta stává méně efektivní v odstraňování částic křížících dráhu vnější planety a vnější planeta má tendenci je více vypuzovat. Proto po krátkém čase migrace směrem ven začne vnější planeta migrovat směrem dovnitř. Dále poznamenejme, že alespoň pro podmínky, které byly studovány, migrace vnější planety směrem dovnitř je rychlejší než u vnitřní planety. Tyto výsledky naznačují, že planetezimální migrace může vést k rezonancím mezi dvěma obřimi planetami, jak je pozorováno v mnoha extrasolárních planetárních systémech [53]. To také může přivést planetární systém do nestabilní konfigurace.

5.3 Vypuzení planety daleko od mateřské hvězdy

Ve většině protoplanetárních disků můžeme pozorovat útvary, jako jsou mezery, zvlnění, asymetrické shluky či spirálovité vlny, které jsou zpravidla připisovány přítomnosti obíhajících planet. Například Wyatt [63] ukázal, že útvary v disku okolo Vegy mohly vzniknout gravitačním působením planety o hmotnosti Neptunu, která ze vzdálenosti 40 AU od centrální hvězdy migrovala až do vzdálenosti 65 AU za dobu 56 My. Wyatt et al. [65] také představili model disku pozorovaného u hvězdy η Crv s planetou o hmotnosti Neptunu, která se za 25 My vzdálila z 80 na 105 AU. Také útvary v discích u hvězd β Pic a ϵ Eri byly modelovány s pomocí přítomnosti planet ve vzdálenosti několika desítek AU od centrální hvězdy. Spirálovité útvary v disku u hvězdy HD141569 jsou spojovány s přítomností planety o hmotnosti 0,2–2 hmotnosti Jupitera, obíhající dokonce ve vzdálenosti 250 AU a planety o hmotnosti Saturnu ve vzdálenosti 150 AU [64]. Tyto modely volají po vysvětlení, jak mohou planety migrovat tak daleko od centrální hvězdy do oblastí, ve kterých rozhodně nemohla proběhnout akrece.

Již jsme poznali, že pokud by se v našem planetárním systému nacházel hmotný planetezimální disk, sahající až do vzdálenosti 50 AU, Neptun by velice rychle začal překotně migrovat až na okraj tohoto disku. Obrázek 12 ukazuje vývoj dráhy Neptunu ve stejném disku, který byl rozšířen až do 200 AU s radiálním profilem plošné hustoty úměrným $1/r$. Neptun zde dosahuje heliocentrické vzdálenosti vyšší než 110 AU, ale aniž by dosáhl okraje disku, *vrací se zpět*. Tato náhlá změna v průběhu migrace nastává proto, že planeta migruje natolik rychle, že časová škála pro blízká přiblížení planety s planetezimálami je srovnatelná, nebo dokonce delší než pro vlastní migraci planety skrz oblast planetezimál. Takže v souřadnicové soustavě spojené s planetou většina částic jednoduše driftuje směrem dovnitř a ponechává si přibližně konstantní excentricitu. Celkový výsledek je, že hodnota \bar{k} , charakterizující v rovnici (48) rychlost změny momentu hybnosti, se s časem postupně snižuje.

Planeta neodpovídá na redukci \bar{k} postupným snižováním rychlosti své migrace, protože se současně zvyšuje množství hmoty v oblasti prošlé planetou (M v rovnici (48)), a to rychleji než se snižuje hodnota \bar{k} . To má za následek, že se velikost $\frac{da_P}{dt}$ nesnižuje s časem. Nicméně pokud $\bar{k} = 0$, $\frac{da_P}{dt}$ se stává nulovým a migrace se náhle zastaví. Když k tomu dojde, planeta se nachází v nestabilní situaci. Jestliže gravitační působení planetezimál excitovaného disku ve vnitřní části směrem od planety mírně převládne nad působením částic z vnějšího disku, planeta začne překotně migrovat zpět směrem dovnitř. Takový scénář migrace je bohužel zřejmě možný



Obrázek 12: Vývoj dráhy Neptunu v planetezimálním disku o poloměru 200 AU s radiálním profilem plošné hustoty úměrným $1/r$. Převzato z [17].

pouze pro planety středních hmotností, jako je například Neptun. Podobný pohyb pro planetu hmotnosti Jupiteru by vyžadoval příliš vysokou hmotnost planetezimálního disku, což není realistické. Závěrem tedy je, že pro migraci planet do velkých vzdáleností od centrální hvězdy jsou často potřeba velmi rozlehlé disky.

5.4 Pozdní nestability

Model z Nice raného vývoje sluneční soustavy ukazuje, že gravitační nestability mohou hrát ve vývoji planetárních soustav významnou roli. Další důkazy přicházejí z oblastí mimo sluneční soustavu. Mnoho známých extrasolárních planet obíhá po velmi excentrických drahách. Bylo ukázáno, že nejpřirozenější vysvětlení tohoto jevu souvisí s rychlou změnou parametrů planetárních drah (např. [39], [44]).

Proč se planetární systémy stávají nestabilními? Neexistuje žádný fyzikální důvod v procesu tvorby a vývoje planet, který by zaručil, že bude systém stabilní v dlouhém časovém měřítku. Planetární systémy tedy mohou přetrvávat i stovky milionů let a poté se stanou nestabilními [39]. Je možné, že gravitační interakce mezi planetami a dostatečně hmotnými populacemi malých těles mohou vést planetární systém k nestabilním konfiguracím. (Existence planetezimál přitom může být zcela přirozená – na konci fáze plynného disku se planetezimály nacházejí jen na

drahách s vyšší dynamickou životností, než je čas potřebný k rozpadu mlhoviny). Události jako pozdní silné bombardování nemusí být pravidlem, ale lze je mnohdy v multiplanetárních systémech očekávat.

Skutečně, pozorování disků u hvězd hlavní posloupnosti spektrálního typu A a G Spitzerovým dalekohledem odhalila některé systémy o stáří 100 My až 3 Gy s neočekávaně vysokým tokem v infračervené části spektra, což naznačuje přítomnost velkého množství cirkumstelárního prachu [51], [32]. U hvězd spektrálního typu A byly pozorovány systémy se stářím několika málo 100 My, které na vlnové délce 24 mikrometrů vykazovaly přebytek záření oproti normálním hvězdám typu A. Odtud lze odhadnout teplotu prachového disku v rozmezí od 75 do 175 K. V okolí hvězd spektrální třídy A můžeme takovou rovnovážnou teplotu očekávat ve vzdálenosti od 10 do 60 AU.

Označíme-li bolometrickou svítivost hvězdy L_S a bolometrickou svítivost disku L_D , odpovídá pozorovaná odchylka poměru L_D/L_S řádu 10^{-4} . Minimální hmotnost prachu potřebná k takové emisi je v řádu 10^{20} kg, což odpovídá jednomu rozpadlému tělesu o průměru několika stovek kilometrů.

Podobně u hvězd podobných Slunci bylo objeveno více než 15 % systému se stářím až miliardu let s IR anomálií na vlnové délce 70 mikrometrů, což odpovídá přibližně teplotám 40–75 K a poloměru od 20 do 50 AU, podobně jako u Kuiperova pásu. Poznamenejme, že minimální hmotnost prachu, potřebná ke vzniku výraznější anomálie při nižších teplotách a na větších vlnových délkách u hvězd podobných Slunci, je typicky 10^{-3} až $10^{-2}M_E$, tedy o dva řády více než u hvězd spektrálního typu A. Pro disk o velikosti Kuiperova pásu by bylo zapotřebí k vytvoření takového množství prachu v kolizní rovnováze planetezimál o celkové hmotnosti 3–10 M_E .

Takovýto pás však pravděpodobně není pozůstatkem hmotnějšího planetezimálního disku. Buď se jedná o systém, ve kterém proběhly nedávné kolize těles o hmotnosti Měsíce, nebo se zde s větší pravděpodobností objevily nestability v pozdních fázích, jako tomu bylo v naší sluneční soustavě v období pozdního těžkého bombardování.

6 Simulace migrace planet

Přesné informace o počátečních fázích vzniku a vývoje sluneční soustavy nelze získat zpětnou integrací pohybových rovnic, neboť se jedná o *ljapunovsky nestabilní* chaotický a časově ireverzibilní systém, jehož časový vývoj je extrémně citlivý na nastavení počátečních podmínek. Pro modelování primordiálních fází planetárního systému je proto zapotřebí provést několik sad simulací jeho vývoje s různými hodnotami počátečních parametrů, porovnat je s pozorovanými charakteristikami sluneční soustavy, a na výsledná data nahlížet statisticky.

6.1 Symplektické integrátory

Při studiu problémů nebeské mechaniky jsou široce využívány symplektické integrátory – numerická schémata, pomocí kterých je hamiltonovský systém aproximován při zachování jeho základní symplektické struktury, tj. například zachování střední hodnoty integrálu energie. Symplektické integrátory mají oproti jiným algoritmům dvě hlavní výhody. Zaprvé nevykazují dlouhodobý nárůst chyby celkové energie systému a zadruhé je možno výpočet pohybu každého objektu okolo centrálního tělesa urychlit vhodným rozdělením hamiltoniánu na dvě části.

Nejužívanějšími jsou symplektické integrátory druhého řádu, neboť se snadno implementují a spokojíme-li se průměrnou přesností, je průběh integrace velmi rychlý. Pro dosažení přesnějších výsledků je třeba využít metod čtvrtého a vyššího řádu, což je samozřejmě časově náročnější, neboť jeden krok se skládá z šestice dílčích subkroků, zatímco metoda druhého řádu vyžaduje pouze dva subkroky na jeden krok. Tuto nevýhodu lze obejít použitím symplektických integrátorů pseudo-vyššího řádu, které umožňují zmenšit počet subkroků tím, že jsou některé členy vyšších řádů zanedbávány. Výsledky takových integrací jsou při znatelném zvýšení rychlosti výpočtu (desítky až stovky procent) srovnatelné s použitím „pravých“ integrátorů vyšších (4, 6) řádů [9].

Základem symplektických integrátorů pro N -částicový model jsou Hamiltonovy rovnice

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (57)$$

kde q_i jsou zobecněné souřadnice, p_i kanonicky sdružené impulzy a H označuje hamiltonián systému (celkovou energii), přičemž časový vývoj jakékoli dynamické veličiny $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ můžeme vyjádřit jako

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \{f, H\} \equiv Ff, \quad (58)$$

kde jsme F označili operátor Poissonových závorek s hamiltoniánem. Formálním řešením (58) a následným Taylorovým rozvojem dostaneme

$$f(t) = \exp(\tau F) f(t - \tau) = \left(1 + \tau F + \frac{\tau^2 F^2}{2} + \dots \right) f(t - \tau), \quad (59)$$

což nám ze „staré“ hodnoty f v čase $(t - \tau)$ umožňuje vypočítat novou hodnotu f v čase t .

Nyní předpokládejme, že hamiltonián lze nějakým způsobem rozdělit na dva členy H_A a H_B : $H = H_A + H_B$. Dále se budeme zabývat vývojem souřadnic q_i , čili zmiňovaná funkce f je velmi jednoduchá: $f = q_i$. Vztah pro f pak přechází na tvar:

$$q_i(t) = \exp[\tau(A + B)] q_i(t - \tau), \quad (60)$$

kde A a B jsou diferenciální operátory vztahující se k H_A a H_B stejně jako F k H .

Využijme platnosti Baker-Campbell-Hausdorffova vztahu pro operátory τA a τB :

$$\exp(\tau A) \cdot \exp(\tau B) = \exp(\tau C), \quad (61)$$

kde τC je dáno vztahem

$$\tau C = \tau A + \tau B + \frac{1}{2} [\tau A, \tau B] + \frac{1}{12} [\tau A, \tau A, \tau B] + \frac{1}{12} [\tau B, \tau B, \tau A] + \dots \quad (62)$$

Pokud se totiž pokusíme zapůsobit na q postupně oběma operátory τA a τB , dostáváme

$$\begin{aligned} & \exp(\tau A) \cdot \exp(\tau B) q(t - \tau) = \\ & = \exp \left[\tau(A + B) + \frac{\tau^2}{2} [A, B] + \dots \right] q(t - \tau) \doteq q(t), \end{aligned} \quad (63)$$

což je, vezmeme-li v úvahu pouze první řád v τ , pravá strana rovnice (60). Vztah (63), tedy přibližně popisuje časový vývoj souřadnic a reprezentuje integrátor 1. řádu. Každý krok integrace je složen ze dvou sub-kroků $\exp(\tau A)$ a $\exp(\tau B)$, což na celý krok dává chybu řádu τ^2 . Jinak řečeno, daný integrátor by přesně řešil takový problém, jehož hamiltonián je:

$$H_{\text{int}} = H + \frac{\tau}{2} \{H_B, H_A\} + O(\tau^2). \quad (64)$$

Za předpokladu, že je τ dostatečně malé a $\{H_B, H_A\}$ omezené, zůstává energie modelového systému při integraci vždy velmi blízka reálnému systému, popsanému hamiltoniánem H .

Integrátory vyšších řádů dostaneme libovolnou kombinací exponenciálních operátorů, která bude ekvivalentní rovnici (60) až do daného řádu τ , tj. například:

$$\begin{aligned} P_2 &= \exp\left(\frac{\tau}{2}B\right) \exp(\tau A) \cdot \exp\left(\frac{\tau}{2}B\right) q(t - \tau) = \\ &= \exp\left[\tau(A + B) + \frac{\tau^3}{12}[A, A, B] - \frac{\tau^3}{24}[B, B, A] + \dots\right] q(t - \tau) \end{aligned} \quad (65)$$

Dosud nebylo ovšem řečeno, jakým způsobem je možno hamiltonián H rozdělit. Konstrukce symplektických integrátorů pseudo-vyšších řádů je založena na faktu, že lze celkový hamiltonián rozdělit například dle vztahu

$$H = H_A + \varepsilon H_B, \quad (66)$$

kde $\varepsilon \ll 1$. Pro konkrétní případ integrace systému N těles obíhajících okolo centrálního tělesa je první částí H_A *keplerovský hamiltonián* pohybu těles okolo centrálního tělesa, druhou částí pak εH_B hamiltonián *vzájemných interakcí* všech těles s výjimkou centrálního. Pravá strana vztahu (65) pak přechází do tvaru

$$P_2 = \exp\left[\tau(A + \varepsilon B) + \frac{\varepsilon\tau^3}{12}[A, A, B] - \frac{\varepsilon^2\tau^3}{24}[B, B, A] + \dots\right] q(t - \tau) \quad (67)$$

Vidíme, že chybové členy řádu τ^3 se liší ve faktoru ε . Podobně bychom pro integrátor čtvrtého řádu dostali

$$\begin{aligned} P_4 &= \exp\left(\frac{\tau\varepsilon B}{2c}\right) \cdot \exp\left(\frac{\tau A}{c}\right) \cdot \exp\left(\frac{\tau\varepsilon B(1-k)}{2c}\right) \cdot \exp\left(\frac{-\tau k A}{c}\right) \cdot \\ &\cdot \exp\left(\frac{\tau\varepsilon B(1-k)}{2c}\right) \cdot \exp\left(\frac{\tau A}{c}\right) \cdot \exp\left(\frac{\tau\varepsilon B}{2c}\right) \end{aligned} \quad (68)$$

a

$$P_4 = \exp\left[\tau F + O(\varepsilon\tau^5) + O(\varepsilon^2\tau^5) + O(\varepsilon^3\tau^5) + O(\varepsilon^4\tau^5)\right] q(t - \tau), \quad (69)$$

kde $k = 2^{1/3}$ a $c = 2 - k$.

Při konstrukci sofistikovanějších forem symplektických integrátorů se využívá právě té skutečnosti, že některé chybové členy jsou vůči ostatním velmi malé a lze je zanedbat. Při konstrukci přesných integrátorů je však třeba počítat se závislostí chybových členů jak na τ , tak na ϵ .

Symplektický integrátor implementovaný v balíku SWIFT [6] počítá keplerovský pohyb po elipsách dle H_A analyticky (s využitím numerického řešení Keplerovy rovnice) – této fázi se v algoritmu říká „drift“. V případě interakčního hamiltoniánu ϵH_B je použito další aproximace – násobení hamiltoniánu δ -funkcí v čase. Jinými slovy: v diskretních časových krocích se numericky spočítají perturbace rychlostí, způsobné interakcí s ostatními planetami. Tato fáze je v algoritmu označována jako „kick“.

6.2 Limity použití integrátorů

Většina informací, jež poskytuje model z Nice, je založena na výsledcích simulací symplektických integrátorů, a je proto přirozené položit otázku, jak provedené simulace odpovídají realitě a jaké jsou jejich limity.

Aby bylo simulace vůbec možno provést, je i přes využití nejmodernější výpočetní techniky stále nutno zavádět určitá zjednodušení. Především je nutno významně omezit počet částic v disku – obvykle je k simulacím využíváno 10^3 – 10^4 částic stejné hmotnosti, které interagují s velkými tělesy (planetami), ale neinteragují spolu navzájem. Tento způsob zjednodušení modelu disku přináší tři hlavní omezení:

6.2.1 Hmotnost testovacích částic

Typická hodnota hmotnosti částice uvažovaného disku vychází v rozmezí $0,005$ – $0,1 M_E$, v závislosti na zvolené hmotnosti disku a počtu jeho částic. Přestože v reálném primordiálním disku nelze vyloučit přítomnost těles o hmotnosti Měsíce ($0,01 M_E$), nebo dokonce Marsu ($0,1 M_E$), je velice pravděpodobné, že v takových tělesech bude obsažena jen velmi malá část hmotnosti celého disku, takže hmotnosti částic v použitém modelu jsou zcela nerealistické. A protože setkání s tělesy velké hmotnosti vede ke stochastické migraci, může použití takového zjednodušení vyústit ve zkreslení průběhu a výsledku migrace. Tyto stochastické děje ovlivňují záchyty těles v rezonancích a jejich následná uvolnění, takže velikost těles má ve skutečnosti vliv jak na střední rychlost migrace, tak na strukturu disku. Navíc stochastické os-

excitace hlavní poloosy planety podporují její migraci tam, kde by ve skutečnosti již byla migrace tlumena. Při výše popsaných simulacích byly nalezeny případy, kdy byla migrace Neptunu v disku s 10 000 částicemi o hmotnosti 40–45 M_E rychle utlumena, zatímco v disku o stejné hmotnosti, složeném z pouze 1 000 částic, byla naopak urychlována.

Z tohoto důvodu je dobré v případě, že v disku pozorujeme nějaký zajímavý dynamický jev, ověřit, zda se tento jev uplatní i v případě disku s větším počtem částic o menší hmotnosti, nebo s částicemi o nulové hmotnosti, a s rychlostí migrace planet analyticky předepsanou. Pokud daný jev přetrvává, je s velkou pravděpodobností reálný. Naopak, pokud zmizí, je třeba na něj nahlížet přinejmenším s jistou dávkou skepse.

6.2.2 Vyloučení gravitační interakce mezi částicemi disku

Použité modely nezahrnují interakce mezi částicemi disku. Toto zjednodušení může být zdrojem dalších dvou potenciálních problémů. Jednak jsou výsledné rychlosti precese drah částic nesprávné, a proto jsou chybné i polohy sekulárních rezonancí. Tomuto problému se bez započtení vzájemných interakcí částic disku prakticky nelze vyhnout, opačný postup však enormně prodlužuje dobu výpočtu. V případě, že je nějaký fenomén úzce spjat s určitými sekulárními rezonancemi, pak může být jeho interpretace z uvedeného důvodu mylná.

Druhým důsledkem nezapočítání vzájemné interakce mezi částicemi je fakt, že je-li disk v nějakém místě dynamicky excitován, například rezonancí, pak se tato excitace nešíří diskem jako vlna, tak jako by tomu bylo v případě modelu, jenž by správně modeloval *kolektivní chování částic* [66]. Díky tomu, že použité modely toto šíření postrádaly, nejsou excitace v místě svého vzniku tlumeny. Na druhou stranu je vlnové šíření uskutečnitelné pouze za předpokladu, že je dynamická excitace disku velmi malá ($e < 0,01$, $i < 0,3^\circ$, viz [23]).

Každopádně se nezdá být pravděpodobné, že by tento problém měl zásadní vliv na popis planetární migrace, neboť hlavní hybnou silou migrace popisované výše jsou relativně blízká přiblížení mezi planetami a částicemi disku. Na druhou stranu může mít popsaná skutečnost sekundární vliv, neboť kolektivní vlastnosti mohou způsobit změnu stavu částic, které vstupují do oblasti, v níž dochází k jejich interakci s planetou.

6.2.3 Vyloučení srážek mezi částicemi disku

Dalším omezením použitých integrátorů byla absence srážkové interakce mezi částicemi disku. Neelastické srážky do jisté míry tlumí dynamickou excitaci disku, míra jejich vlivu je však funkcí mnoha parametrů, mezi jinými sloupcové hustoty disku, jeho dynamické teploty a velikosti jednotlivých částic disku. Na možný význam tohoto procesu upozornili Goldreich et al. [15], když studovali případ, ve kterém je srážkové tlumení tak efektivní, že dokáže prakticky okamžitě utlumit každou dynamickou excitaci. Takový efekt mohl mít znatelný vliv na proces formování planet a patrně i na podobu planetární migrace. Nicméně rozdělení velikosti částic v disku, které by bylo potřebné pro tento případ, je značně extrémní – prakticky všechny planetezimály by musely mít průměr okolo 1 cm a přirozeně vystává otázka, zda takový scénář rozdělení velikosti částic je reálný, tj. zda disk s takovými vlastnostmi mohl být přirozeným produktem vývoje primordiálního planetárního systému, a pokud ano, zda se tato jeho vlastnost uplatňovala po dostatečně dlouhou dobu před tím, než se vyvinula do dalšího stadia (buď vytvořením větších těles, nebo rozmělněním na prach). Existence těles v hlavním pásu planetek i v Kuiperově pásu však ukazuje, že alespoň v době, kdy vznikly planety, měly planetezimály různé velikosti, od malých zrněk až k tělesům velikosti Ceresu nebo Pluta.

Aby bylo rozhodnuto, zda mají srážky mezi částicemi podstatný vliv na planetární migraci, bylo sestaveno několik srážkových modelů a provedeny simulace s takovým rozdělením, které preferovalo částice střední velikosti. Leinhardt a Richardson [35] ukázali, že překotný růst planetárních embryí se srážkami je prakticky nerozlišitelný od simulací, ve kterých nebyly brány srážky v úvahu. Charnoz a Morbidelli [10] ověřili, že kolizní vývoj disku s realistickým rozdělením velikostí částic je jen mírný a týká se jen malé části těles mezi drahami Jupiteru a Saturnu. Studium rozptylu planetezimál tělesem o hmotnosti Jupiteru se, se započtením vlivu vzájemných srážek, zabývali také Charnoz a Brahic [11]. Tyto simulace ukázaly, že zanedbání vlivu srážek nemá zřejmě znatelný vliv na dynamiku systému a následně na proces migrace. Přestože tedy kolektivní chování částic a jejich vzájemné srážky alespoň v určitých fázích vývoje systému hrají určitou roli, jejich vliv na průběh migrace je zřejmě možno zanedbat.

Závěrem lze tedy říci, že výsledky simulací, na jejichž základě byl sestaven model z Nice, snad dobře popisují realitu a že zanedbané jevy mají pouze druhořadý význam. Ovšem ke studiu dílčích fenoménů, které nám model planetární migrace předestírá, bude nutno využít jak sofistikovanějších forem symplektických integra-

torů, tak zvýšení počtu částic disku, což však v současné době klade příliš vysoké požadavky na výpočetní výkon.

6.3 Simulace konkrétních dějů v pozdním období formování sluneční soustavy

K simulaci dynamických dějů, které probíhaly v raných obdobích vývoje sluneční soustavy a které byly popsány výše, bylo použito dvou symplektických integrátorů: MERCURY [7] a SWIFT (upravená verze, [6])²³

Program MERCURY je příkladem N -částicového integrátoru, ve kterém je zahrnuto jak gravitační působení planet na testovací částice (planetezimály), tak i gravitační působení testovacích částic na planety. Zanedbáno je pouze vzájemné gravitační působení mezi planetezimály.

Naproti tomu program SWIFT je příkladem integrátoru, ve kterém je projev gravitačního působení planetezimál na planety (tj. planetární migrace) předepsán analyticky. Na planetu zde působí disipativní zrychlení

$$\vec{a} = k_{\text{mig}} e^{(t-t_0)/\tau} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (70)$$

kde konstanta

$$k_{\text{mig}} = -\frac{1}{\tau} \left(\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_f}} - \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_i}} \right). \quad (71)$$

Integrační schéma integrátoru SWIFT tedy počítá pouze gravitační působení planet na testovací částice, migrace je předepisována zadanými počátečními a koncovými hodnotami velikosti velké poloosy a_i a a_f a časovou škálou migrace τ . Uvedené odlišnosti uvedených integrátorů zároveň vymezují oblast jejich použití, jak je dokumentováno dále.

Provedeny byly celkem tři simulace, označené dále jako M1, SP, SH, ve kterých byla sledována migrace vnějších planet (zejména planety Neptun) do oblasti disku planetezimál, spolu s ději, které ji doprovázejí. Dále byl simulován proces rozpadu populace těles nacházejících se v oblasti rezonance 3:2 s Jupiterem²⁴ při jeho průchodu rezonancí 2:1 se Saturnem.

²³Programy byly zkompilovány 64-bitovou verzí překladače Intel Fortran na platformě Linux OpenSuse v. 10.3. K simulacím byl využit počítač s dvoujádrovým procesorem architektury Intel Pentium IV Dual Core o taktu 3,4 GHz.

²⁴V této oblasti dnes pozorujeme skupinu planetek označovaných jako skupinu Hilda. Jedná se o přibližně 1000 těles s velkou poloosou dráhy od 3,7 do 4,2 AU, obíhajících vůči ekliptice se sklonem do 20° a s maximální excentricitou 0,07.

6.4 Simulace N -částicovým integrátorem MERCURY

V simulaci označené jako M1 byl programem MERCURY simulován vývoj planetárního systému, jehož počáteční (index i) a konečnou (index f) konfiguraci spolu s dnes pozorovanými hodnotami (označení indexem o , [31]) uvádí tabulka 2.

Tabulka 2: Počáteční a koncové podmínky simulace M1 v oskulačních elementech.

| | a_i [AU] | a_f [AU] | a_o [AU] | e_i | e_f | e_o | i_i [°] | i_f [°] | i_o |
|---------|------------|------------|------------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------|
| Jupiter | 5,21 | 4,95 | 5,20 | 0,002 | 0,003 | 0,049 | 0 | 0,08 | 1,30 |
| Saturn | 8,07 | 8,86 | 9,55 | 0,005 | 0,02 | 0,054 | 0 | 0,35 | 2,49 |
| Uran | 12,40 | 17,28 | 19,19 | 0,007 | 0,03 | 0,047 | 0 | 1,17 | 0,77 |
| Neptun | 17,64 | 29,10 | 30,06 | 0,008 | 0,005 | 0,009 | 0 | 1,33 | 1,77 |

Ve studované soustavě se na počátku simulace nacházely dva systémy testovacích částic:

1. Systém označovaný dále jako M1.H obsahoval celkem 1 000 těles, která se na počátku simulace pohybovala v blízkosti oblasti vnitřní rezonance s Jupiterem 3:2. Jednalo se o tělesa s hlavní poloosou dráhy v rozmezí (3,89–4,02) AU, s excentricitami (0,03–0,35) a sklonem dráhy (0,3–20)°. Testovací částice tohoto systému měly nulovou hmotnost, tj. byly zanebány jak jejich vzájemné gravitační interakce tak gravitační interakce částice – planeta.
2. Systém označený jako M1.P tvořilo 1 000 těles, obíhajících po drahách s hlavní poloosou 18,5–30 AU, excentricitou do 0,001 a sklonem do 0,001°. Celková hmotnost těles v systému M1.P činila $50 M_E$.²⁵ Tento systém reprezentoval tělesa primordiálního disku, která díky velké vzdálenosti od Slunce již neprošla dalším akrečním vývojem (viz kap. 3.1).

Počáteční stav studované soustavy ukazuje obrázek 13, kde jsou tělesa vyobrazena v rovině XY, tj. při pohledu „shora“, a obrázek 14, kde je soustava vyobrazena v rovině XZ (pohled „zboku“). Obrázek 14 dokumentuje, že narozdíl od systému M1.H byl disk M1.P dynamicky chladný – sklony drah (a také excentricity těles) byly zpočátku velmi malé.

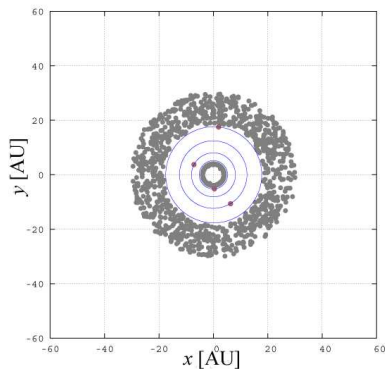
Další časový vývoj systému ukazují obrázky 15–19. Obrázek 15 ukazuje systém po 300 000 letech relativně klidného vývoje. V tomto období nedocházelo mezi pla-

²⁵Hmotnost disku byla v této simulaci nadhodnocena, podle současných poznatků [59] činila jeho hmotnost přibližně $35 M_E$. Disk také nebyl tak dynamicky chladný, jak bylo v simulaci M1 uvažováno.

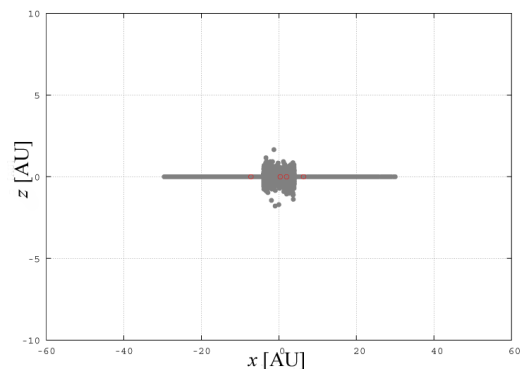
netami k rezonancím středních pohybů a jejich velké poloosy se měnily jen pozvolna díky gravitační interakci s diskem planetezimál.

Zcela jinou situaci ukazuje obrázek 16, kde je systém zachycen v okamžiku 800 000 let od počátku simulace. Předtím, v čase 637 000 let od počátku simulace, došlo k průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí oběžných dob 2:1. Obrázek 16 tedy ukazuje, jak se planety dynamicky zahřály (tj. došlo ke zvýšení jejich excentricit, sklonů, a tedy i vzájemných rychlostí).

Obrázek 17 dokumentuje stav systému po 1,1 Myr od počátku simulace, kdy zmíněný průchod Jupiteru a Saturnu rezonancí 2:1 způsobil výrazný úbytek těles v systému M1.H. Počet těles systému M1.H v závislosti na čase znázorňuje též obrázek 21, na kterém je patrný strmý úbytek těles v okamžiku uvedené rezonance. Zřetelné dynamické oteplení disku v době po průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí 2:1 také dobře dokumentuje obrázek 18. Ten zachycuje systém ve stáří 1,1 Myr při pohledu v rovině XZ. Z porovnání s obrázkem 14 vyplývá výrazný nárůst sklonu drah.

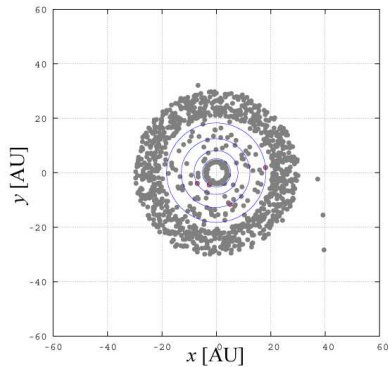


Obrázek 13: $t = 0$. Pohled v rovině XY ukazuje systémy M1.P (vnější prsteneček), M1.H (vnitřní prsteneček) a dráhy planet.

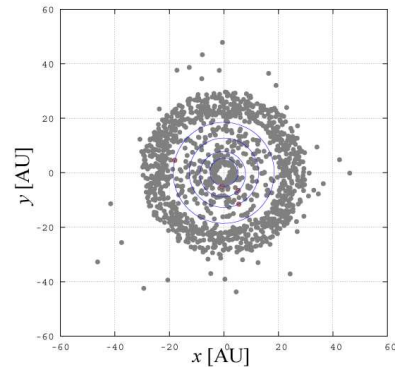


Obrázek 14: $t = 0$, pohled v rovině XZ. Pro zvýraznění profilu disku byla zvolena rozdílná měřítka na osách X a Z.

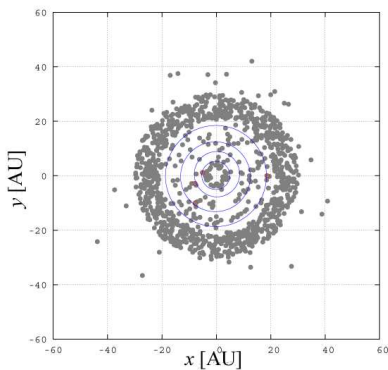
Obrázek 19 zachycuje systém po 20 Myr simulace, kde je znatelný počátek rozpadu systému M1.P, způsobený migrací Neptunu do vzdálenosti přibližně 28 AU a jeho rychlým vnořením do disku planetezimál v období od 3 do 5 Myr. Tělesa systému M1.H již nejsou v soustavě přítomna. Konečný stav systému ve stáří 100 Myr ukazuje obrázek 20, který dokumentuje úplný rozpad obou systémů testovacích částic. Zde je namístě poznamenat, že v reálném případě se v obdobných systémech ve sluneční soustavě nacházelo o několik řádů větší množství částic, a úplný rozpad obou testovacích systémů v simulacích proto sám o sobě nevyklučuje možnost, že některá tělesa, jež se zde původně nacházela, mohla v těchto oblastech setrvat.



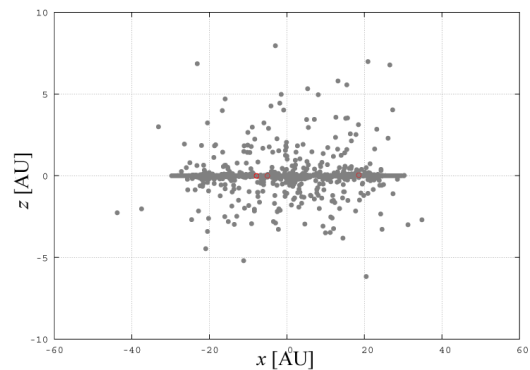
Obrázek 15: $t = 0,3$ Myr.



Obrázek 16: $t = 0,8$ Myr.



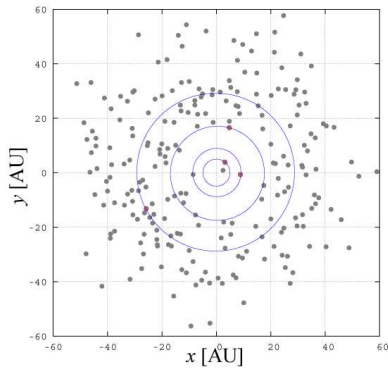
Obrázek 17: $t = 1,1$ Myr.



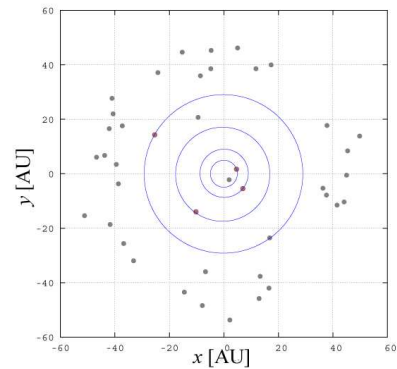
Obrázek 18: $t = 1,1$ Myr, pohled XZ.

Dynamický ohřev disku, který způsobil jeho postupnou erozi a vyústil v celkový rozpad na konci simulace, je patrný z grafu průběhu střední excentricity těles disku v závislosti na čase (obrázek 22). Počáteční strmý nárůst střední excentricity z hodnoty 0,03 na 0,16 během prvních 500 kyr, způsobený gravitační interakcí těles testovaných systémů s planetami na počátku migrace, je vystřídán stejně strmým poklesem k hodnotě 0,1 v čase 1 Myr. Tento pokles je způsoben úbytkem²⁶ těles s vysokou excentricitou, která byla ze systému vypuzena během průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí oběžných dob 2:1. Další rychlý nárůst střední excentricity těles je způsoben rychlým vnořením migrujícího Neptunu do disku planetezimál (M1.P). Ve stáří 10 Myr se nárůst stává pozvolnějším a maximální střední excentricity 0,36 dosahuje systém ve stáří 23 Myr. Poté dochází k dalšímu, tentokrát pomalému, poklesu excentricit, který je opět způsoben úbytkem těles, pohybujících se po vysoce výstředných drahách. Od času $t = 50$ Myr je možno střední excentricitu těles disku

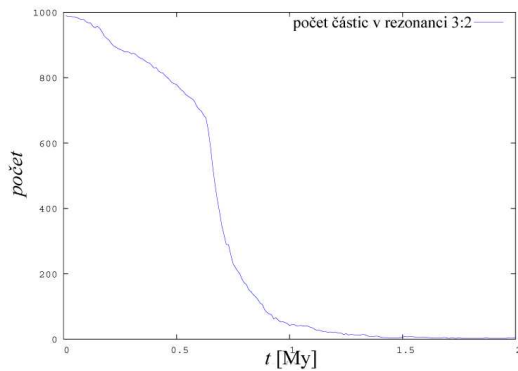
²⁶V simulacích není nadále počítáno s tělesy, jejichž pericentrum je menší než poloměr Slunce. Z důvody úspory početního výkonu nejsou také nadále uvažována tělesa, u kterých velikost velké poloosy přesáhne 1 000 AU. V reálném případě se samozřejmě nejedná o úbytek těles.



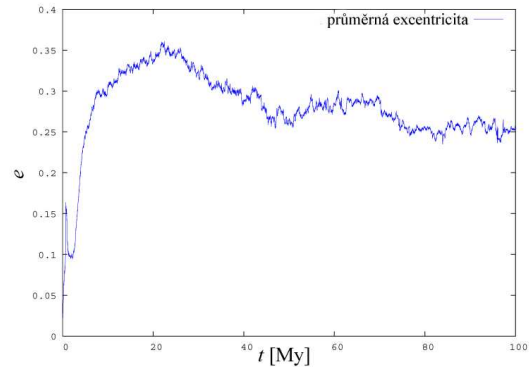
Obrázek 19: $t = 20$ Myr.



Obrázek 20: $t = 100$ Myr, konec simulace.



Obrázek 21: Počet částic systému M1.H v závislosti na čase.

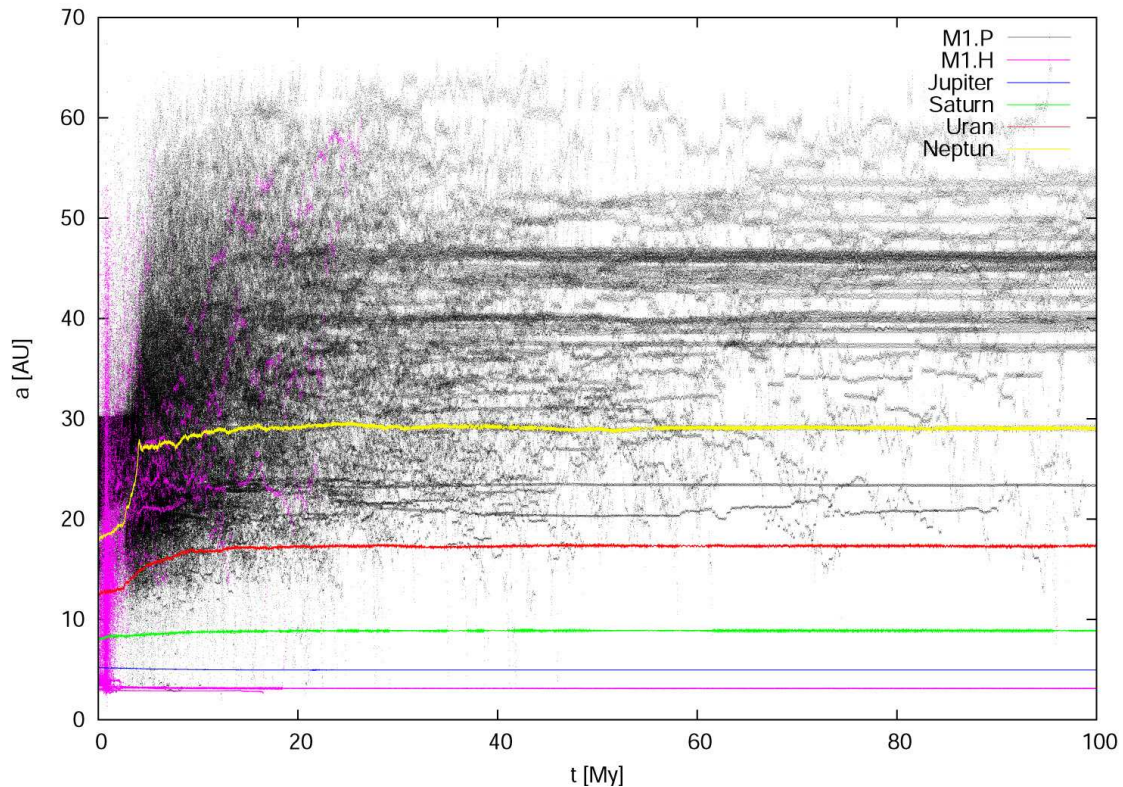


Obrázek 22: Časový vývoj střední excentricity částic systému M1.

považovat díky jeho stabilizaci (vypuzení těles na excentrických drahách) za přibližně konstantní.

Vizualizace disku (obrázky 13–20) sice dokumentuje časový vývoj vzhledu systému, ale pro jeho lepší kvalitativní popis je vhodnější použít grafu závislosti velké poloosy a těles na čase. Takový graf ukazuje obrázek 23, ze kterého je dobře patrné, kdy docházelo k migraci jednotlivých planet. K nejvýraznější změně došlo u velké poloosy planety Neptun, který shodou okolností migroval z počáteční vzdálenosti 18 AU do vzdálenosti 29 AU, tedy přibližně do vzdálenosti, v níž se dnes tato planeta nachází. Nejrychlejší nárůst velké poloosy Neptunu nastal ve chvíli, kdy se planeta díky pomalé migraci, způsobené gravitační interakcí s tělesy systému M1.P, dostala k okraji tohoto disku a rychle se do něj vnořila. Nejrychlejší fáze migrace tedy časově koresponduje s obdobím, kdy se v okolí planety pohybuje velké množství hmotných částic.

V souladu s migrací Neptunu probíhala i migrace planety Uran. Ta totiž do času přibližně 3 Myr migrovala jen velmi pozvolna a zrychlení její migrace nastalo až ve



Obrázek 23: Časový vývoj velikosti velké poloosy planet a částic systémů M1.P a M1.H.

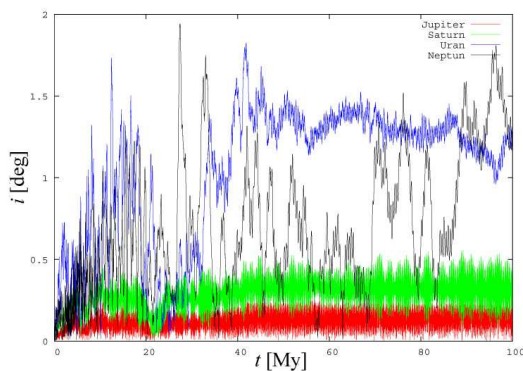
chvíli, kdy k ní bylo prostřednictvím Neptunu transportováno větší množství částic z disku. V období, kdy byly částice z Uranova okolí ze systému vypuzeny (v čase 10 Myr), se migrace planety zastavila.

Na rozdíl od Uranu a Neptunu byla migrace Saturnu, respektive Jupiteru jen velmi málo výrazná (+0,5 AU, respektive -0,2 AU), a to jednak díky vyšší hmotnosti planet, jednak z důvodu nedostatku částic v okolí jejich oběžných drah. K nejvýraznější změně ve velikosti jejich velkých poloos došlo díky průchodu rezonancí oběžných dob 2:1 v období 700 kyr po začátku simulace. Tato rezonance také destabilizovala do té doby stabilní oblasti rezonance 3:2 MMR s Jupiterem a způsobila velice rychlý rozpad populace M1.H. K tomu došlo do 2 Myr po průchodu rezonancí.

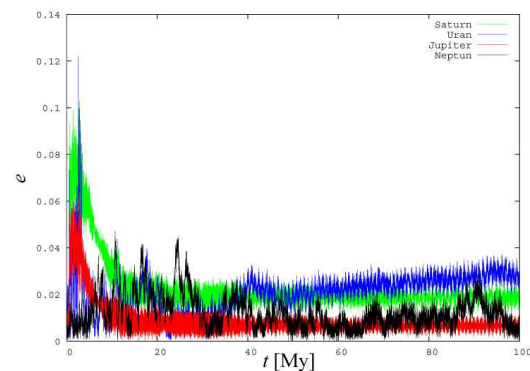
Graf časové závislosti velké poloosy $a(t)$ oproti časové vizualizaci disku lépe dokumentuje, kam „zmizela“ většina částic disku – byla rozptýlena na dráhy s hlavními poloosami výrazně většími než 70 AU.

Rozbor časového vývoje hlavních poloos těles systému však sám o sobě pro jeho popis nestačí, neboť nevypovídá nic o sklonech oběžných drah těles (planet), a ze-

jména o jejich excentricitách. Kupříkladu vysoká výstřednost drah planet by mohla znamenat možnost takového vzájemného přiblížení, které by vyústilo v destabilizaci celého planetárního systému, zakončeného například únikem některé planety. Obrázky 24 a 25 však ukazují, že sklony a excentricity oběžných drah planet nevybočují z parametrů dnešní sluneční soustavy (viz též tabulka 2). Poznamenejme, že právě zvýšení sklonu oběžných drah z hodnot blízkých 0 na současné hodnoty je jedním z důkazů o perturbaci drah planet interakcí s planetezimálním diskem. Obrázek 25 ukazuje časový vývoj excentricit planet. Dobře patrný je růst excentricity Jupiteru a Saturnu v okamžiku průchodu rezonancí 2:1, stejně jako nárůst excentricit Uranu a Neptunu v průběhu migrace. Graf také ukazuje dynamické tlumení excentricit, způsobené interakcí s tělesy disku. Tento jev byl jedním z hlavních procesů, které zformovaly parametry těles sluneční soustavy do dnešních hodnot (jak bylo popsáno v kapitole 4.6).



Obrázek 24: Časový vývoj sklonu drah planet v simulaci M1.



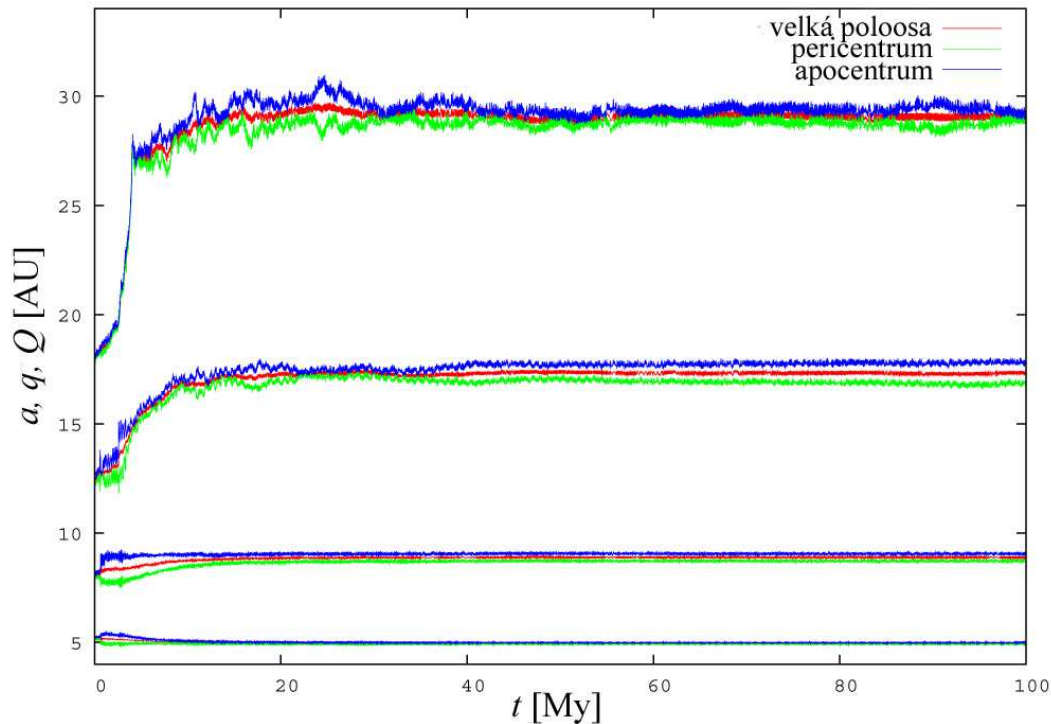
Obrázek 25: Časový vývoj excentricit drah planet v simulaci M1.

Pro kvalitativní popis evoluce drah planet v raných obdobích vývoje sluneční soustavy se také často využívá grafu znázorňujícího nejen časový průběh změny velké poloosy planety a , ale také vývoj jejího pericentra q a apocentra Q . Poslední dvě jmenované veličiny totiž zároveň udávají excentricitu oběžné dráhy e :

$$e = \frac{Q - q}{Q + q}. \quad (72)$$

Takový graf ukazuje obrázek 26. Velká poloosa dráhy každé planety je zde znázorněna červeně, pericentrum je vyznačeno zelenou a apocentrum modrou barvou.

Z grafu je dobře patrná překotná fáze migrace Neptunu v období od 3 do 5 Myr, během níž došlo také ke zvýšení jeho excentricity. V této fázi migrace navíc planety Uran a Neptun prošly v čase $t = 3,3$ Myr rezonancí oběžných dob 2:1, což se pro-



Obrázek 26: Vývoj velkých poloos, pericentra a apocentra planet v simulaci M1.

jevilo zvýšením excentricity obou planet a skokovou změnou jejich velkých poloos. Je možné, že právě tato událost urychlila erozi planetezimálního disku Neptunem a urychlila proces vnoření této planety do disku.

Zřetelné jsou dále důsledky rezonancí, jimiž prošly planety Jupiter a Saturn, zejména 2:1 MMR v čase 0,7 Myr. Ta způsobila skokovou změnu velké poloosy drah těchto planet a nárůst jejich excentricit, což je, s ohledem na poměr hmotností obou planet, patrné zejména u Saturnu.

Gravitační interakcí Saturnu s planetezimálami však došlo k postupnému tlumení jeho excentricity a cirkularizaci jeho dráhy. Naopak, proces tlumení excentricity není patrný u Uranu v čase od 40 Myr. Jedná se o následek skutečnosti, že drtivá většina těles byla již ze systému vypuzena, takže nemůže docházet k jejich interakci s planetou a k následné cirkularizaci její dráhy. Planeta Uran proto měla na konci simulace ze všech planet nejvyšší excentricitu – 0,025.

Vývoj dráhy planety Uran nakonec poznamenaly další rezonance oběžné doby s planetou Saturn, konkrétně 2:1 MMR, ke které došlo v čase 13,2 Myr od počátku simulace a dále slabší rezonance 3. řádu 5:2 MMR, ke které došlo v čase 6,6 Myr.

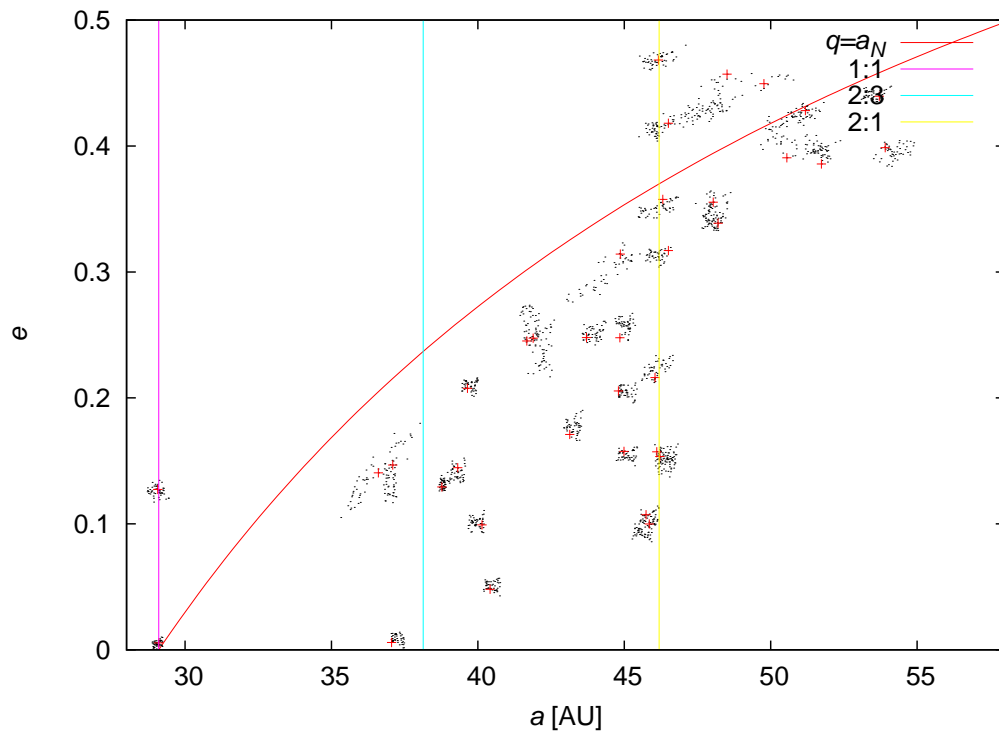
6.4.1 Zachycení těles v rezonancích s Neptunem

Přestože rychlé vnoření planety Neptun do planetezimálního disku mělo za následek jeho rozpad, došlo v průběhu simulace k zachycení několika těles na drahách blízkých rezonancím s Neptunem 2:3 a 1:2 MMR, tedy v oblasti, kde se vyskytují tělesa dnešního Kuiperova pásu. Protože existence těchto těles je velmi pravděpodobně přímým důsledkem evoluce drah planet v pozdních fázích formování sluneční soustavy, lze porovnáním současných parametrů těles Kuiperova pásu a parametrů, jaké mají testovací částice po ukončení simulací s různými počátečními podmínkami, odhadnout pravděpodobný vývoj drah vnějších planet v tomto období. Na obrázku 27 vidíme graf závislosti excentricity těles na velké poloose dráhy ve vzdálenosti 28–55 AU. Křížky jsou vyznačeny polohy těles na konci simulace v čase 100 Myr, tečky ukazují polohy částic za poslední 1 Myr simulace.

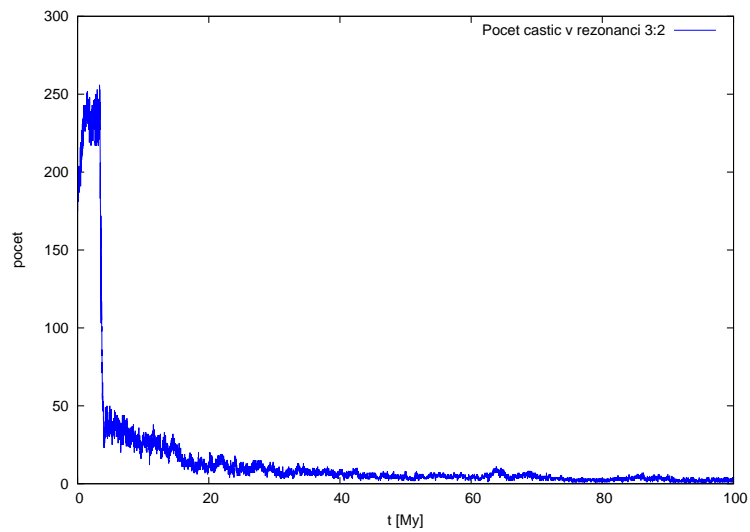
Z obrázku (27) je patrné, že v oblasti rezonance 1:2 s Neptunem bylo zachyceno několik těles, zatímco k zachycení těles v rezonanci 2:3 nedošlo. Naopak jedna částice byla zachycena v rezonanci 1:1 MMR a stala se Neptunovým Trojanem. Z polohy těles vůči červené křivce vyznačující hranici, na níž je pericentrum planetky shodné s velkou poloosou Neptunu, je patrná přítomnost *protekčního mechanismu*, udržujícího tělesa v rezonanční oblasti přesto, že se jejich dráha *zdánlivě* kříží s drahou Neptunu. Na obrázku 28 vidíme graf počtu těles, která se nacházela v oblasti rezonance s Neptunem 2:3 MMR, v závislosti na čase. Je zde patrný strmý úbytek, který odpovídá období překotné migrace Neptunu.

6.4.2 Rozpad populace v rezonanci 3:2 s Jupiterem

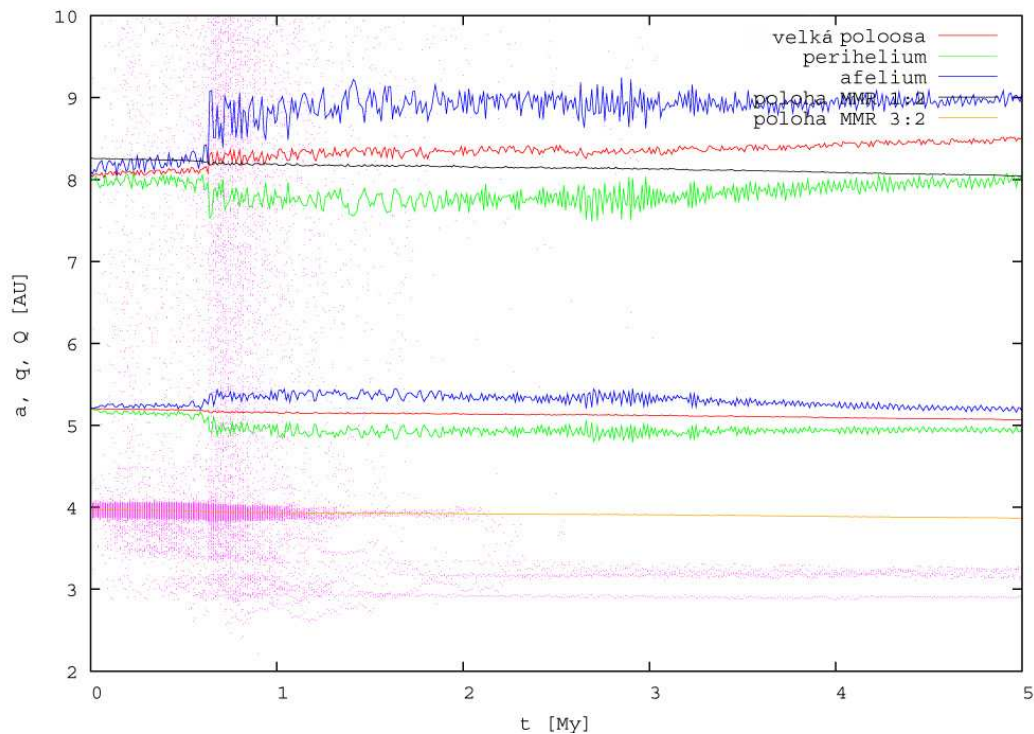
V první části kapitoly 6.4 byl zmiňován celkový rozpad populace těles systému M1.H, tj. těles, která se nacházela v oblasti rezonance středních pohybů 3:2 s Jupiterem. Obrázek 29 ukazuje vývoj velkých poloos planet a planetezimál (u planet též pericenter a apocenter) v závislosti na čase. Do času 637 000 let od počátku simulace můžeme u planet pozorovat pozvolnou migraci (u Jupiteru směrem ke Slunci, u Saturnu směrem od Slunce), způsobenou interakcí s planetezimálami disku za drahou Neptunu (částice systému M1.H byly na rozdíl od systému M1.P nehmotné, jejich gravitační působení na planety nebylo v simulaci uvažováno). V okamžiku průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí 2:1 dochází k prudkému nárůstu excentricity obou planet, což je dokumentováno nárůstem rozdílu vzdálenosti pericentra a apocentra. Průchod rezonancí je doprovázen změnou stabilních oblastí v rezonanci 3:2 s Jupiterem, rychlým rozptylem planetezimál a prudkým úbytkem jejich počtu, viz



Obrázek 27: Závislost excentricity planetezimál za drahou Neptunu na velké poloose dráhy – stav na konci simulace M1.



Obrázek 28: Počet částic, které se v průběhu simulace M1 nacházely v oblasti rezonance 2:3 MMR s Neptunem.



Obrázek 29: Simulace M1.H – časová závislost velké poloosy populace planetezimál v rezonanci 3:2 s Jupiterem při jeho průchodu rezonancí 1:2 se Saturnem. U planet je též znázorněna vzdálenost pericentra a apocentra.

též obrázek 21. Opět poznamenejme, že současný výskyt planetek skupiny Hilda v oblasti rezonance 3:2 s Jupiterem není v rozporu s vývojem sluneční soustavy, předpokládaným modelem z Nice, viz též kapitola 4.7.

6.5 Simulace integrátorem SWIFT a porovnání výsledků

Počáteční hodnoty velkých poloos drah planet, jejich excentricity a sklony drah (index i) spolu s koncovým stavem (index f) a porovnání s pozorovanými hodnotami oskulačních elementů (index o) pro simulaci S.P, při které byl simulován záchyt těles v rezonančních oblastech za drahou Neptuna, uvádí tabulka 3.

Připomeňme, že konečné hodnoty velikostí velkých poloos zde nejsou výsledkem interakce planet s planetezimálami, neboť všechny testovací částice měly nulovou hmotnost. Migrace planet je u tohoto integrátoru důsledkem působení disipativního

Tabulka 3: Počáteční a koncové podmínky simulace S1.P v oskulačních elementech.

| | a_i [AU] | a_f [AU] | a_o [AU] | e_i | e_f | e_o | i_i [°] | i_f [°] | i_o |
|---------|------------|------------|------------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------|
| Jupiter | 5,20 | 5,11 | 5,20 | 0,049 | 0,021 | 0,049 | 0,33 | 0,45 | 1,30 |
| Saturn | 8,50 | 9,35 | 9,55 | 0,054 | 0,067 | 0,054 | 0,93 | 0,93 | 2,49 |
| Uran | 18,20 | 18,37 | 19,19 | 0,047 | 0,080 | 0,047 | 1,03 | 1,03 | 0,77 |
| Neptun | 25,15 | 30,01 | 30,06 | 0,008 | 0,061 | 0,009 | 0,73 | 0,60 | 1,77 |

zrychlení dle vztahu (70).²⁷

Časový vývoj velikostí hlavních poloos planet spolu s jejich pericentry a apocentry v simulaci S1.P ukazuje obrázek 30. Porovnání s grafem vývoje velkých poloos planet v simulaci M1 (obrázek 26) ukazuje zásadní odlišnost ve vývoji drah planet Uran a Neptun, což je dáno rozdíly obou integrátorů. Další odlišnosti vidíme ve vývoji excentricity planet. Zatímco u simulace provedené integrátorem MERCURY se projevuje tlumení excentricit drah planet interakcí s planetezimálami (alespoň v době, ve které jsou v systému planetezimály přítomny), u integrátoru SWIFT toto tlumení chybí, což je opět způsobeno tím, že planetezimály mají nulovou hmotnost a nemohou tedy excentricity planet tlumit.

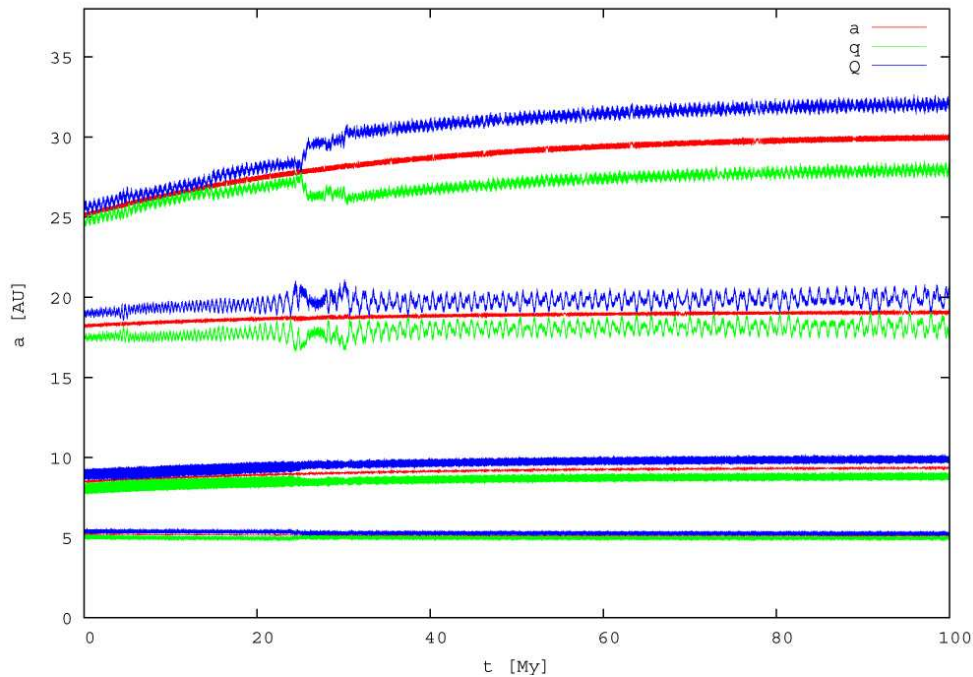
Pomocí integrátoru SWIFT byly provedeny simulace obou dějů popsaných v oddíle 6.4, tj.

1. simulace rozpadu populace planetezimál v rezonanci 3:2 MMR s Jupiterem při průchodu Jupiteru rezonancí 2:1 MMR se Saturnem,
2. simulace záchytu těles v rezonanancích 1:1, 2:3 a 1:2 s Neptunem během jeho migrace do disku planetezimál.

Porovnejme nyní výsledky simulací provedených oběma integrátory. Srovnáním obrázků 29 a 31 docházíme ke zjištění, že v případě rozpadu rezonanční populace 3:2 s Jupiterem dávají oba modely kvalitativně i kvantitativně shodné výsledky. Odlišnosti můžeme opět pozorovat ve vývoji excentricit planet Jupiteru a Saturnu, které, nejsou v případě integrátoru SWIFT tlumeny.

Dobrou shodu obou simulací je možno též dokumentovat srovnáním obrázků 21 a 32. Strmější pokles počtu částic v případě simulace rozpadu rezonanční populace integrátorem SWIFT je možno vysvětlit rychlejší migrací Jupiteru a Saturnu do

²⁷Hodnoty charakteristické časové škály migrace (τ ve vztazích (70) a (71)) byly získány proložením časového vývoje velkých poloos drah planet v simulaci M1 exponenciálou. Uvažovány byly pouze ty části vývoje, ve kterých neprobíhala překotná migrace a ve kterých nebyl pohyb planet ovlivněn průchodem rezonancemi.

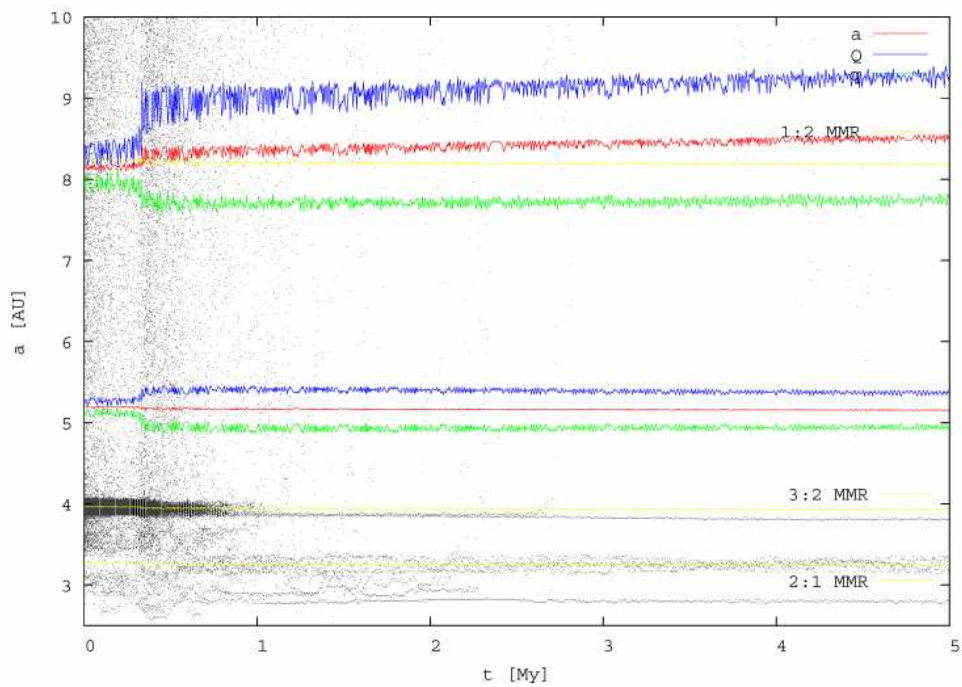


Obrázek 30: Časový vývoj velikosti velké poloosy planet během simulace S1 – záchytu těles v rezonancích s Neptunem.

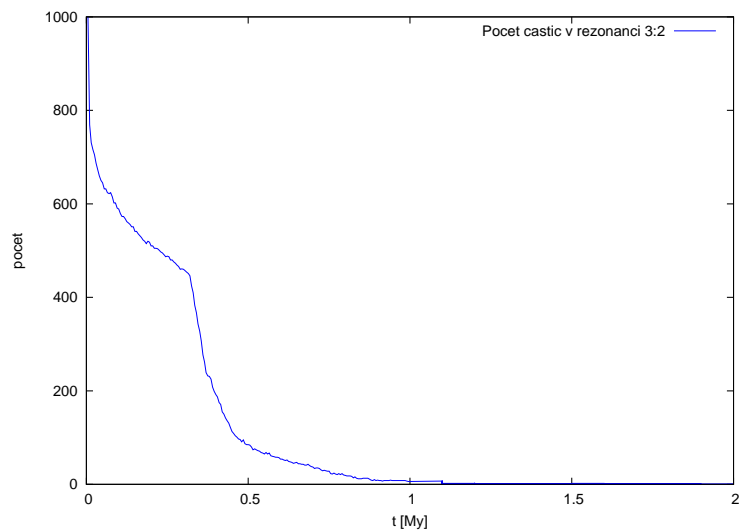
oblasti jejich rezonance 1:2. Zatímco v případě simulace M1.H nastal tento průchod po 0,67 Myr od počátku simulace, v případě simulace S.H došlo k průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí 1:2 již v čase 0,27 Myr od počátku simulace. Tento časový rozdíl je dán pouze mírně odlišným nastavením počátečních podmínek.

Kvalitativně odlišné výsledky poskytují oba modely v případě simulace záchytu těles planetezimálního disku do rezonancí s Neptunem, což zjistíme porovnáním obrázků 27 a 33. To je dáno především charakterem vývoje dráhy této planety. Ta byla v případě integrátoru MERCURY řízena výhradně interakcí s planetezimálami, zatímco v případě integrátoru SWIFT byla migrace analyticky předepsána. V časovém vývoji dráhy Neptunu simulovaném integrátorem MERCURY je proto možno sledovat prudký nárůst velikosti velké poloosy, způsobený jeho interakcí s tělesy planetezimálního disku, do kterého se postupně vnořil, což jeho migraci nadále urychlilo. V případě simulace integrátorem SWIFT byla ale předepsána pouze pozvolná změna velké poloosy, odpovídající pozdější fázi migrace.

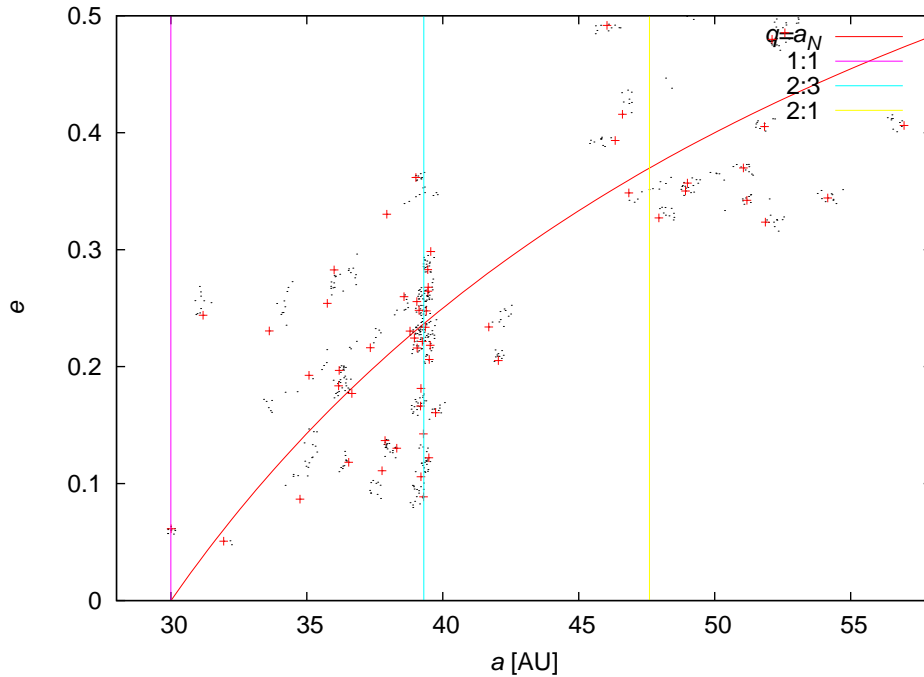
Další rozdíl spočívá v počátečním nastavení vlastností disku planetezimál a v poloze rezonancí s Neptunem. Na obrázcích 34 a 35 vidíme grafy závislosti $e(a)$ těles za drahou Neptunu. Vidíme, že v případě simulace M1.P byl zvolen dy-



Obrázek 31: Simulace S.H – časová závislost velké poloosy populace planetezimál v rezonanci 3:2 s Jupiterem při jeho průchodu rezonancí 2:1 se Saturnem. U planet je též znázorněna vzdálenost pericentra a apocentra.



Obrázek 32: Počet těles v oblasti rezonance 3:2 s Jupiterem při jeho průchodu rezonancí 2:1 se Saturnem – simulace S.H.



Obrázek 33: Závislost excentricity planetezimál za drahou Neptunu na velké poloose dráhy – stav na konci simulace S1.P.

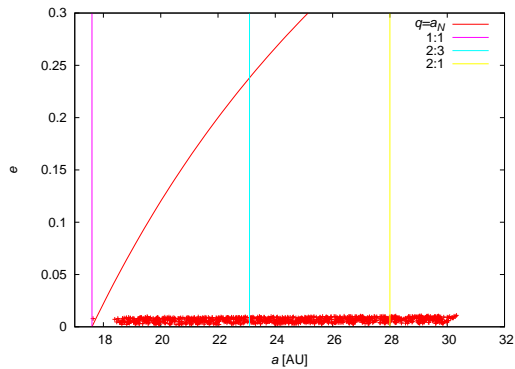
namicky chladný disk, narozdíl od simulace S1.P, kde byla excentricita těles řádově vyšší, takže některá již na počátku simulace křížila dráhu Neptunu.

Pro výsledek simulace byla také podstatná poloha oblastí vnějších rezonancí s Neptunem vůči disku testovacích těles – planetezimál. Pro výsledek simulací bylo podstatné, že v případě simulace M1.P se rezonance 2:1 nacházela uvnitř disku, zatímco v případě simulace S1.P ležela vně disku.

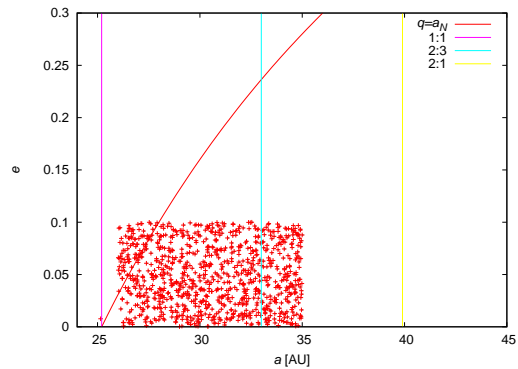
Odlíšné počáteční podmínky a průběh migrace jsou patrné na počtu těles, zachycených v rezonanci 3:2 s Neptunem. V případě simulace M1.P nastala u Neptunu překotná fáze migrace, během které rezonance 3:2 rychle opustila disk, zatímco v případě simulace S1.P se Neptun pohyboval jen pozvolna. Absence tlumení Neptunovy excentricity v simulaci S1.P také způsobila, že oblasti rezonancí byly podstatně širší, což vedlo spolu se změnou polohy sekulárních rezonancí ke změně vnitřní struktury rezonance středního pohybu, včetně změny stabilních oblastí.²⁸

Díky uvedeným rozdílům v průběhu simulovaných dynamických dějů je efektivita zachycení těles v rezonancích zřejmě vyšší v případě integrátoru SWIFT než

²⁸V místech překryvu rezonancí totiž dochází k chaotické difuzi a případně ke vzniku velkoškálové nestability.



Obrázek 34: Závislost $e(a)$ těles za drahou Neptunu na počátku simulace M1.P.



Obrázek 35: Závislost $e(a)$ těles za drahou Neptunu na počátku simulace S1.P.

v případě integrátoru MERCURY.

Závěrem lze říci, že se podařilo numericky simulovat některé fáze vývoje sluneční soustavy, tj. migraci velkých planet a její vliv na populace malých těles. Simulace vystihují základní aspekty vývoje, pro zjištění efektivity zachycení ve vnějších rezonancích však nemají dostatečné rozlišení (počty testovacích částic byly z důvodu snížení nároků na výpočetní výkon malé).

7 Závěr

V práci bylo ukázáno, že planety sluneční soustavy vznikly postupnou akrecí planetezimál a planetárních embryí v protoplanetárním disku, v případě obřích planet došlo též ke gravitačnímu kolapsu okolního plynu. Po akreci planet však v systému zůstalo velké množství planetezimál, které obíhaly okolo Slunce a gravitačně působily na planety, což způsobovalo podstatné změny jejich velkých poloos – migraci.

V současnosti nejúspěšnější teorií, popisující tuto fázi, je model z Nice [59], který postuluje existenci disku planetezimál za drahou Neptuna o celkové hmotnosti 30–50 M_E . Mezi důkazy podporujícími tento model patří zejména pozorované vlastnosti těles Kuiperov pásu a také počet těles, která se nacházejí v oblastech rezonancí s planetami.

V práci byly provedeny N -částicové numerické integrace disku planetezimál symplektickým integrátorem z balíku MERCURY, které simulovaly vlastní migraci způsobenou díkem planetezimál. Zkoumána byla také možnost zachycení těles v rezonancích s Neptunem při jeho průchodu diskem planetezimál a stabilita populace těles ve vnitřní rezonanci s Jupiterem při jeho průchodu rezonancí 2:1 se Saturnem. Obě simulace potvrdily vývoj přepokládaný v citovaných modelech.

Z provedených integrací dále vyplývá, že některé fáze orbitálního vývoje (nikoli celý vývoj) lze simulovat pomocí integrátoru SWIFT s analyticky předepsanou migrací. Jde například o výpočet destabilizace rezonanční populace Hild při průchodu Jupiteru a Saturnu rezonancí 2:1. Výhodou použití jednoduššího modelu je možnost podstatného zvýšení počtu testovacích částic, protože je možné počítat částice z více simulací se shodně předepsanou migrací, běžících paralelně na více procesorech. To bude předmětem další práce.

Reference

- [1] Allen R. L., Bernstein G. M., Malhotra R., 2001. *Astron. J.*, 124, 2949-2954.
- [2] Bernstein G. M., Trilling D. E., Allen R. L., Brown M. E., Holman M., Malhotra R., 2004. *Astron. J.*, 128, 1364-1390.
- [3] Bertotti B., Farinella, R., Vokrouhlický, D., 2003. *Physics of the solar system*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [4] Borderies N., Goldreich P., 1984. *Celestial Mechanics*, 32, 127-136.
- [5] Brož, M., 2004, *Povětroň*, 12, 5, 4.
- [6] Brož, M., 2008. <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/>
- [7] Chambers, J. E., 1999. *MNRAS*, 304, 793
- [8] Chambers, J. E., 2009. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 37, 321-344.
- [9] Chambers, J. E., Murison, M. A., 2000. *Astron. J.*, 119, 425-433.
- [10] Charnoz, S., Morbidelli, A., 2003. *Icarus*, 166, 141-156.
- [11] Charnoz, S., Brahic, A., 2003. *Astron. Astrophys.*, 375, L31-L34.
- [12] Duncan, M. J., Levison, H. F., Budd, S. M., 1995. *Astron. J.*, 110, 3073-3081.
- [13] Fernandez, J. A., Ip, W. H., 1984. *Icarus*, 103, 67-92.
- [14] Fernandez, J. A.; Ip, W. H., 1984. *Icarus*, 58, 109-120.
- [15] Goldreich, P., Lithwick, Y., Sari, R., 2004. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 42, 549-601.
- [16] Gomes, R. S., Morbidelli A., Levison H.F., 2004. *Icarus*, 170, 492-507.
- [17] Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis K., Morbidelli, A., 2005. *Nature*, 435, 466-469.
- [18] Gomes, R. S., 1998. *Astron. J.*, 116, 2590-2597.
- [19] Gomes R. S., 2003. *Icarus*, 161, 404-418.
- [20] Greenberg, R., Botthe, W. F., Carusi, A., Valsecchi, G.B., 1991. *Icarus*, 94, 98-111.
- [21] Guillot, T., 1999. *Science*, 286, 72-77.
- [22] Hahn, J. M., Malhotra, R., 2005. *Astron. J.*, 130, 2392-2414.
- [23] Hahn, J. M., 2003. *Astron. J.*, 595, 531-549.
- [24] Hamilton, P.D., Burns, J.A., 1992. *Icarus*, 96, 4364.
- [25] Hartmann, W. K., Ryder, G., Dones, L., Grinspoon, D., 2000. in *Origin of the earth and moon*, 493-512. University of Arizona Press, Tucson.
- [26] Hayashi, C., 1981. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 70, 35-53.
- [27] Henrard, J., Morbidelli, A., 1993. *Phys. D*, 68, 187-200.
- [28] Hillenbrand, L. A., 2004. *Origins 2002 proceedings*, C. E. Woodward, E. P. Smith.
- [29] Hollenbach, D., Adams, F. C., 2004. *Debris Disks and the Formation of Planets*, 168. *Astronomical Society of the Pacific*, San Francisco.
- [30] Ida, S., Bryden, G., Lin, D. N. C., Tanaka, H., 2000. *Astrophys. J.*, 534, 428-445.
- [31] JPL Solar System Dynamics. <http://ssd.jpl.nasa.gov>
- [32] Kim, J. S., Hines, D. C., Backman, D. E., Hillenbrand, L. A., Meyer, M. R., 2005. *Astrophys. J.*, 632, 659.
- [33] Kenyon, S. J., Luu, J. X., 1998. *Astron. J.*, 115, 2136-2160.
- [34] Kenyon, S. J., Luu, J. X., 1999. *Astron. J.*, 118, 1101-1119.
- [35] Leinhardt, Z. M., Richardson, D. C., 2005. *Astrophys. J.*, 625, 427-440.
- [36] Levison, H. F., Duncan, M. J., 1994. *Icarus*, 108, 18.

- [37] Levison, H. F., Morbidelli, A., Dones, L., 2004. *Astron. J.*, 128, 2553-2563.
- [38] Levison, H. F., Morbidelli, A., 2003. *Nature*, 426, 419-421.
- [39] Levison, H. F., Stewart, G. R., 2001. *Icarus*, 153, 224-228.
- [40] Levison, H. F., Morbidelli, A., Gomes, R., Backman, D., 2007. in *Protostars and Planets V*, University of Arizona Press.
- [41] Malhotra, R., 1993. *Nature*, 365, 819.
- [42] Malhotra, R., 1995. *Astron. J.*, 110, 1, 420-429.
- [43] Miscenko, T. A., Beaugé, C., Roig, F., 2001. *Astron. J.*, 122, 3485-3491.
- [44] Moorhead, A. V., Adams, F. C., 2005. *Icarus*, 178, 517-539.
- [45] Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., Gomes, R., 2005. *Nature*, 435, 462-465.
- [46] Murray, N., Hansen, B., Holman, M., Tremaine, S., 1998. *Science*, 279, 69.
- [47] Murray-Clay, R. A., Chiang, E. I., 2005. *Astrophys. J.*, 619, 623-638.
- [48] Papaloizou, J. C. B., Terquem, C., 2006. *Rep. Prog. Phys.*, 69, 119-180.
- [49] Petit, J. M.; Henon, M., 1986. *Icarus*, 66, 536-55.
- [50] Rafikov, R. R., 2003. *Astron. J.*, 125, 922-941.
- [51] Rieke, G. H., Su, K. Y. L., Stansberry, J. A., Trilling, D., Bryden, G., Muzerolle, J., White, B., Gorlova, N., Young, E. T., Beichman, C. A., Stapelfeldt, K. R., Hines, D. C., 2005. *Astrophys. J.*, 620, 1010-1026.
- [52] Safronov, V. S., 1972. *NASA TTF*, 667, 206.
- [53] Schneider, J., 2009. *Extra solar planets encyclopaedia*, <http://exoplanet.eu/>
- [54] Stern, S. A., 1996. *Astron. J.*, 112, 1203-1211.
- [55] Stone, J. M., Ostriker, E. C., Gammie, C. F., 1998. *Astrophys. J.*, 508, L99-L102.
- [56] Thommes, E. W., Duncan, M. J., Levison, H. F., 2003. *Icarus* 161, 431-455.
- [57] Thommes, E. W., 2001. PhD thesis, Queen's University at Kingston.
- [58] Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., Levison, H. F., 2005. *Nature*, 435, 459-461.
- [59] Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., Levison, H. F., 2005. *Nature*, 435, 459-461.
- [60] Thommes, E. W., Duncan, M. J., Levison, H. F., 1999. *Nature*, 402, 635-638.
- [61] Tegler, S. C., Romanischin, W., 2003. *Icarus*, 161, 181-191.
- [62] Valsecchi, A., Manara, G. B., 1997. *Astron. Astrophys.*, 323, 986-998.
- [63] Wyatt, M. C., 2003. *Astrophys. J.*, 598, 1321-1340.
- [64] Wyatt, M. C., 2005. *Astron. Astrophys.*, 440, 937-948.
- [65] Wyatt, M. C., Greaves, J. S., Dent, W. R. F., Coulson I. M., 2005. *Astrophys. J.*, 620, 492-500.
- [66] Ward, W. R., Hahn, J. M., 2003. *Astron. J.*, 125, 3389-3397.
- [67] Williams, J. P., Blitz, L., McKee, C. F., 2000. in *Protostars and Planets IV*: 97, Tucson: University of Arizona Press.
- [68] Weidenschilling, S. J., 2003. *Icarus* 165, 438-442.
- [69] Youdin, A. N., Shu, F. H., 2002. *Astrophys. J.*, 580, 494-505.